

ANNALEN  
DER  
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDMANN, P. DRUDE.  
VIERTE FOLGE.

Band 51. Heft 8.

DER GANZEN REIHE 356. BANDES 8. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG  
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEgeben von

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1916.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.  
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 8 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.  
(Ausgegeben am 9. Februar 1917.)

# Inhalt.

	Seite
1. H. du Bois. Theorie der Zugarmaturen und Zugspulen. Dritte Mitteilung . . . . .	797
2. Paul Günther. Untersuchungen über die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen . . . . .	828
3. Werner Germershausen. Über die Elektronenemission des Calciumoxyds in Gasen und im extremen Vakuum. (Hierzu Tafel IV.) (Fortsetzung) . . . . .	847
4. G. Berthold. Die Originalluftpumpe Otto v. Guericke's. II. Namenregister zum Jahrgang 1916 . . . . .	881
	883

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleieherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuziehen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahresszahl aufzuführen.





## ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 51.

1. Theorie der Zugarmaturen und Zugspulen;  
von H. du Bois.[Dritte Mitteilung.<sup>1)</sup>]

(Aus dem Bosscha-Laboratorium.)

## VI. Zugarmaturen.

§ 69. Attraktorische Rundarmaturen wurden bereits früher §§ 22—24 und 38—39 kurz besprochen. Die in § 2 angedeuteten Anwendungen in der Chirurgie und der Augenheilkunde wurden inzwischen erheblich erweitert und konstruktiv durchgebildet.<sup>2)</sup> Dementsprechend ist den daraus sich ergebenden Fragen der VI. Abschnitt gewidmet, wobei wieder gleichförmige Magnetisierung vorausgesetzt sei, wie es im I. und II. Abschnitt geschah. Es lag nahe, im Anschluß daran (Abschnitt VII) auch eisenlose Zugspulen zu behandeln.

Die in §§ 22, 23 kurz besprochene Anziehung elementarer Ringzonen bzw. einzelner Kegelflächen in ihren Achsenpunkten sei hier im Hinblick auf die sich nötig erweisenden Erweiterungen in verallgemeinerter Weise durchgeführt. Es handelt sich dabei wesentlich um Armaturen, von denen nur ein Teil in Wirkung tritt, indem das übrige sich an unzugänglichen Stellen — z. B. innerhalb des menschlichen Körpers — befinden würde.

Betrachtet man ein Bogenelement  $de$  einer elementaren Ringzone, wie in Fig. 15 rechts abgebildet, so erzeugt

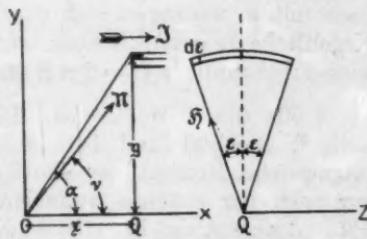


Fig. 15.

1) Erste und zweite Mitteilung: Ann. d. Phys. 42. p. 903. 1913 und 51. p. 577. 1916. Die Bezeichnungen sind dort angegeben.

2) E. Payr, Arch. f. klin. Chirurg. 106. p. 125. 1914; die Naturwiss. 3. p. 391. 1915. H. du Bois, Versl. Akad. Amsterd. 23. p. 15. 1914; Die Naturwiss. 3. p. 389. 1915.

dieses in der Pfeilrichtung einen Feldbetrag  $d^2 \mathfrak{H}$  mit den Komponenten  $d^2 \mathfrak{H}_x$  und  $d^2 \mathfrak{H}_y$ ; dabei ist dann:

$$d^2 \mathfrak{H}_x = \frac{\Im y d\eta d\epsilon}{\varrho^2} \cos \alpha, \quad d^2 \mathfrak{H}_y = \frac{\Im y d\eta d\epsilon}{\varrho^2} \cos \epsilon \sin \alpha, \\ d^2 \mathfrak{H}_z = \frac{\Im y d\eta d\epsilon}{\varrho^2} \sin \epsilon \sin \alpha, \quad d^2 \mathfrak{H} = \frac{\Im y d\eta d\epsilon}{\varrho^2}.$$

Ferner hat man  $\eta = \varrho \sin \alpha$ ,  $\xi = \eta \cot \alpha$ ,  $\partial \alpha / \partial x = \sin^2 \alpha / \eta$ ; die Integration zwischen  $-\epsilon$  und  $+\epsilon$  ergibt zunächst für einen Bogensektor symmetrisch zur  $x$ - $y$ -Ebene:

$$d \mathfrak{H}_x = 2 \Im \epsilon \sin^2 \alpha \cos \alpha \frac{d\eta}{\eta}, \quad d \mathfrak{H}_y = 2 \Im \epsilon \sin \epsilon \sin^3 \alpha \frac{d\eta}{\eta}, \\ d \mathfrak{H} = \sqrt{(d \mathfrak{H}_x)^2 + (d \mathfrak{H}_y)^2} = 2 \Im \epsilon \sin^2 \alpha \sqrt{\sin^2 \epsilon \sin^2 \alpha + \epsilon^2 \cos^2 \alpha} \frac{d\eta}{\eta}.$$

Integriert man zweitens nach  $\eta$  zwischen den üblichen Grenzen  $b$  und  $B$ , so findet man für den Sektor einer Kegelfläche als Feldkomponenten in der Kegelspitze  $O$ :

$$\mathfrak{H}_x = 2 \Im \epsilon \sin^2 \alpha \cos \alpha \log \frac{B}{b}, \quad \mathfrak{H}_y = 2 \Im \epsilon \sin \epsilon \sin^3 \alpha \log \frac{B}{b}.$$

Das resultierende Feld beträgt, wenn man  $(\sin^2 \epsilon) / \epsilon^2$  durch  $\lambda$  abkürzt:

$$(77) \quad \mathfrak{H} = 2 \epsilon \Im \sin^2 \alpha \sqrt{\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \log \frac{B}{b}.$$

Seine Richtung  $\mathfrak{N}$  bildet mit der  $x$ -Achse einen Winkel  $\nu = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha \sin \epsilon) / \epsilon$ ; für kleine  $\epsilon$ -Werte ist  $\nu$  also identisch mit  $\alpha$ , verringert sich dann, bis es für die vollständige Kegelfläche ( $\epsilon = \pi$ ) offenbar schwindet. Es ergibt sich dann wieder bekanntlich  $\mathfrak{H} = 2\pi \Im \sin^2 \alpha \cos \alpha \log B/b$  (§ 6).

§ 70. *Gesättigte Partikel.* Die Zugkraft im Punkte  $O$  ist nach  $\mathfrak{N}$  gerichtet und beträgt  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} d \mathfrak{H} / d \mathfrak{N}$ , wo  $\mathfrak{M}$  das magnetische Moment des Partikels bezeichnet; ist letzteres nur nach der  $x$ -Achse zwangsläufig beweglich, so wird, da  $d \mathfrak{N} = d x \cos \nu$ , die betreffende Komponente:

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{M} \frac{d \mathfrak{H}}{d \mathfrak{N}} \cos \nu = \mathfrak{M} \frac{\partial |\mathfrak{H}|}{\partial x} = \mathfrak{M} \int_b^B \frac{\partial}{\partial x} \frac{d \mathfrak{H}}{d \eta} d \eta \\ = \mathfrak{M} \int_b^B \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{d \mathfrak{H}}{d \eta} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x} d \eta.$$

Nach Einsetzung obigen Wertes für  $d \mathfrak{H}$  ergibt sich:

$$(78) \quad \mathfrak{F}_x = 2 \varepsilon \mathfrak{M} \mathfrak{J} \sin^3 \alpha \cos \alpha \frac{3(\lambda - 1) \sin^2 \alpha + 2}{\sqrt{\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right).$$

Das Maximum dieses Winkelausdrückes wird bestimmt durch die kubische Gleichung:

$$(3\lambda^2 - \lambda)(\operatorname{tg}^2 \alpha)^3 - (12\lambda^2 - 10\lambda)(\operatorname{tg}^2 \alpha)^2 - (19\lambda - 9)\operatorname{tg}^2 \alpha - 6 = 0;$$

diese hat im allgemeinen zwei negative und eine positive Wurzel, welche letztere offenbar allein in Betracht kommt. Einmal ist für kleine  $\varepsilon$ -Werte  $\lambda = 1$ , und hat man dann:

$$(\operatorname{tg}^2 \alpha)^3 - (\operatorname{tg}^2 \alpha)^2 - 5 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 = 0$$

mit den Wurzeln  $-1$ ,  $-1$  und  $+3$ ; der günstigste Winkel für einen solchen schmalen Kegelsektor ist  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ$ ; die Integration nach  $\mathfrak{y}$  ergibt:

$$(79) \quad \mathfrak{F}_x = 4 \varepsilon \mathfrak{M} \mathfrak{J} \sin^3 \alpha \cos \alpha \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right).$$

Zweitens entspricht  $\varepsilon = \pi/2$  dem Werte  $\lambda = 4/\pi^2$ , und es wird für den „Halbkegel“  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{1,882} = 49^\circ 37'$  sowie

$$(80) \quad \mathfrak{F}_x = \mathfrak{M} \mathfrak{J} \sin^3 \alpha \cos \alpha \frac{3(4 - \pi^2) \sin^2 \alpha + 2\pi^2}{\sqrt{4 \sin^2 \alpha + \pi^2 \cos^2 \alpha}} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right).$$

Drittens wird  $\lambda = 0$  für  $\varepsilon = \pi$ ; man erhält einfach  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4}{3}} = 39^\circ 14'$  für die vollständige Kegelfläche und

$$(81) \quad \mathfrak{F}_x = 2\pi \mathfrak{M} \mathfrak{J} \sin^3 \alpha (3 \cos^2 \alpha - 1) \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right)$$

in Übereinstimmung mit Tab. 2, II (§ 22); der Ausdruck schwindet für  $\alpha = 54^\circ 44'$ .

§ 71. *Ungesättigte Partikel.* Für das Verhalten eines Körpers ohne Vorzugsrichtung — etwa einer weichen Eisenkugel — ist bekanntlich das skalare Feldquadrat  $\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H} = |\mathfrak{H}|^2$  maßgebend; die hier nicht additive Zugkraft ist proportional

$$\nabla |\mathfrak{H}|^2 = 2 |\mathfrak{H}| \left( i \frac{\partial |\mathfrak{H}|}{\partial x} + j \frac{\partial |\mathfrak{H}|}{\partial y} + k \frac{\partial |\mathfrak{H}|}{\partial z} \right) = 2 |\mathfrak{H}| \nabla |\mathfrak{H}|.$$

Bei zwangsläufiger Beweglichkeit längs der  $x$ -Achse — etwa mittels eines Glasrohrs — kommt nur das erste Glied in Betracht. Es ist daher  $|\mathfrak{H}| \partial |\mathfrak{H}| / \partial x$  hierfür maßgebend;

es ergibt die Multiplikation von (77) und (78), wobei die Wurzel in Fortfall kommt:

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\nabla |\mathfrak{H}|^2)_x = 8 \varepsilon^2 \mathfrak{J}^2 \sin^5 \alpha \cos \alpha \{ 3(\lambda - 1) \sin^2 \alpha + 2 \} \\ \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right) \log \frac{B}{b} . \end{array} \right.$$

In diesem Falle wird das Maximum des Winkelausdrückes einfacher bestimmt, und zwar durch die quadratische Gleichung:

$$(1 - 3\lambda)(\operatorname{tg}^2 \alpha)^2 + (21\lambda - 18)\operatorname{tg}^2 \alpha + 10 = 0 ,$$

deren Wurzeln sind:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{18 - 21\lambda \pm \sqrt{129 - 426\lambda + 441\lambda^2}}{2 - 6\lambda} .$$

Es ist nun wieder erstens für einen schmalen Kegelsektor ( $\lambda = 1$ ) mit kleinen  $\varepsilon$ -Werten  $\operatorname{tg}^2 \alpha = +5$  oder  $-1$ ; der günstigste Winkel kann daher nur  $\alpha = \operatorname{arctg} 5 = 65^\circ 54'$  sein und es wird in der Kegelspitze  $O$ :

$$(83) \quad (\nabla |\mathfrak{H}|^2)_x = 16 \varepsilon^2 \mathfrak{J}^2 \sin^5 \alpha \cos \alpha \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right) \log \frac{B}{b} .$$

Zweitens wird für  $\varepsilon = \pi/2$ , also  $\lambda = 4/\pi^2$ , für den Halbkegel  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2,0206} = 54^\circ 52'$  und man erhält:

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\nabla |\mathfrak{H}|^2)_x = 2 \mathfrak{J}^2 \sin^5 \alpha \cos \alpha \{ 3(4 - \pi^2) \sin^2 \alpha + 2\pi^2 \} \\ \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right) \log \frac{B}{b} . \end{array} \right.$$

Drittens findet man für die vollständige Kegelfläche ( $\varepsilon = \pi$ ,  $\lambda = 0$ ):

$$\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{18 \pm \sqrt{129}}{2}} = \operatorname{arctg} \sqrt{0,8211}$$

$$\text{oder } \sqrt{12,179} = 42^\circ 11' \text{ bzw. } 74^\circ 1' ;$$

diese Winkel entsprechen positiven bzw. negativen Maximis, während für  $\alpha = 54^\circ 44'$  der Ausdruck

$$(85) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\nabla |\mathfrak{H}|^2)_x = 8 \pi^2 \mathfrak{J}^2 \sin^5 \alpha \cos \alpha (3 \cos^2 \alpha - 1) \\ \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right) \log \frac{B}{b} \end{array} \right.$$

wieder schwindet, entsprechend den kurzen Angaben in Tab. 2, § 22. Wenn man hier  $B = b + d\mathfrak{H}$  setzt und entwickelt,

erhält man die dort unter IV angeführte Formel für eine schmale Kegelzone.

§ 72. Der besseren Übersicht halber seien die Verhältnisse bei der Wirkung einer vollständigen elementaren Ringzone vom Radius Eins auf ihre Achsenpunkte in Fig. 16 graphisch dargestellt; sie unterscheidet sich von Fig. 8 (§ 22)

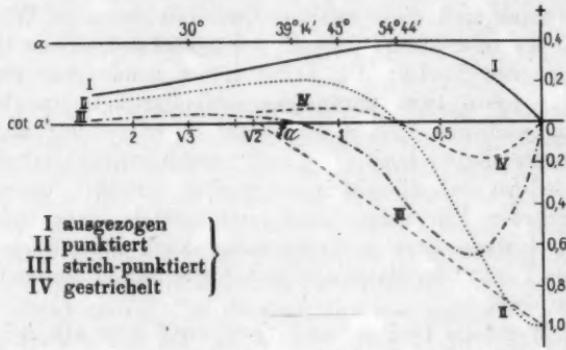


Fig. 16.

durch Vertauschung von rechts und links — was teilweise Vorzeichenwechsel bedingt — und ist im Gegensatz zu jener auch quantitativ richtig, indem ihre Ordinaten dem goniometrischen Faktor der nachstehenden Formeln gleich sind. Hierzu gilt dann Tab. 6, die sich von Tab. 2 in § 22 durch einige Vorzeichen unterscheidet.

Tabelle 6.

I	$d \tilde{h}_x = 2\pi \Im \cdot \sin^2 \alpha \cos \alpha \frac{dy}{y}$	ausgezogen	max. für $54^\circ 44'$
II	$\frac{\partial (d \tilde{h}_x)}{\partial x} = 2\pi \Im \cdot \sin^3 \alpha (3 \cos^2 \alpha - 1) \frac{dy}{y^2}$	punktiert	$\left\{ \begin{array}{l} \text{neg. max. } " 90^\circ \\ \text{Null } " 54^\circ 44' \\ \text{pos. max. } " 39^\circ 14' \end{array} \right\}$ gesättigte Partikel
III	$\frac{\partial^2 (d \tilde{h}_x)}{\partial x^2} = 6\pi \Im \cdot \sin^4 \alpha \cos \alpha (5 \cos^2 \alpha - 3) \frac{dy}{y^3}$	strichpunktiert	$\left\{ \begin{array}{l} \text{neg. max. für } 70^\circ 7' \\ \text{Null } " 39^\circ 14' \\ \text{pos. max. } " 30^\circ 33' \end{array} \right\}$
IV	$\frac{\partial (d \tilde{h}_x)^2}{\partial x} = 8\pi^2 \Im^2 \cdot \sin^5 \alpha \cos \alpha (3 \cos^2 \alpha - 1) \frac{dy}{y} \cdot \frac{dy}{y^2}$	gestrichelt	$\left\{ \begin{array}{l} \text{neg. max. } " 74^\circ 1' \\ \text{Null } " 54^\circ 44' \\ \text{pos. max. } " 42^\circ 11' \end{array} \right\}$ ungesättigte Partikel

Der früheren Diskussion (§§ 22, 23) sei noch betreffs Kurve III hinzugefügt, daß laut Gl. (I) § 2 für Achsenpunkte

$$\frac{\partial^3 (d \mathfrak{H}_x)}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 (d \mathfrak{H}_x)}{\partial z^3} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 (d \mathfrak{H}_x)}{\partial x^3} = 3\pi \mathfrak{J} \cdot \sin^4 \alpha \cos \alpha$$

$$(3 - 5 \cos^2 \alpha) \frac{d \mathfrak{H}_x}{y^3}.$$

Demnach sind diese zweiten Querderivierten im Winkelbereiche  $0 < \alpha < 39^\circ 14'$  negativ, entsprechend einem Quermaximum des Feldes; die Achse bildet somit eine stabile Bahn für ferro- bzw. paramagnetische Partikel, eine labile für diamagnetische. Im Bereich  $39^\circ 14' < \alpha < 90^\circ$  werden die Querderivierten positiv — und durchschnittlich erheblich größer —, so daß alles sich umgekehrt verhält. An einem magnetisierten Eisenrohre lassen sich mittels einer weichen Eisenkugel diese Erscheinungen sowie auch namentlich der „neutrale Punkt“ im Maximalfelde bei  $\alpha = 54^\circ 44'$  anschaulich demonstrieren.

Die Werte der Derivierten  $\partial \mathfrak{H}_x / \partial x$  wurden für alle Achsenpunkte einer ebenen Stirnfläche (Gl. 18) und einer vollständigen Kegelfläche (Gl. 20) in §§ 13, 23 diskutiert. Ebenso für Kugelarmaturen (§§ 16, 24) und Rotationsparaboloide (§§ 19, 24). Für Rotations-Hyperboloiden (§ 5) und Ellipsoide (§ 18) liefert eine Integration ähnlich derjenigen des § 66 ebenfalls  $\mathfrak{H}_x$  und  $\partial \mathfrak{H}_x / \partial x$  für alle Achsenpunkte.

§ 73. *Polespulen.* Wie § 22 bemerkt, wird man sowohl für gesättigte wie auch für ungesättigte Partikel den Halbwinkel einzelner Zugarmaturen praktisch auf  $40-41^\circ$  be-

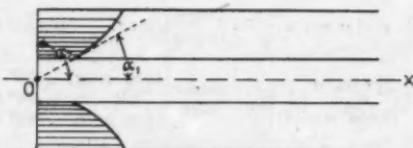


Fig. 17.

messen, aus technischen Gründen sogar oft noch einige Grad weniger. Will man zur Verstärkung der Anziehung eine Polespule vorlegen, wie in Fig. 17 abgebildet, so findet man z. B. bei senkrechter Frontflansche ( $\alpha_2 = 90^\circ$ ) zunächst wieder ohne

Berücksichtigung der elektrischen Leistung für gesättigte Partikel:

$$\frac{\partial (d\mathfrak{H})}{\partial x} = 2\pi \Im \left[ -3 \sin^5 \alpha_1 + \left( 2 - \frac{1}{f} \right) \sin^3 \alpha_1 + \frac{1}{f} \right] \frac{d\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}^2},$$

und als günstigsten Winkel einer Windungslage, ähnlich wie in § 52 Gleichung (88) für Feldspulen:

$$\alpha_1 = \arccos \sqrt{\frac{\frac{3}{5} + \frac{1}{f}}{5}}, \quad [\text{für } f = \infty : \alpha_1 = 39^\circ 14']$$

wo  $f$  wieder den ferromagnetischen Faktor  $\Im j/\mathfrak{C} \mathfrak{h}$  für die betrachtete Lage bedeutet. Ähnlich wie in § 53 lassen sich auch hier eine Anzahl Hauptfälle unterscheiden, je nachdem  $\mathfrak{C} = C_k/\mathfrak{h}^k$  mit dem Radius variiert. Für  $k = 1$  wird  $f$  konstant und die Integration nach  $\mathfrak{h}$  sehr einfach. Für gesättigte Partikel kommt  $k = 3$  in Frage, für ungesättigte  $k = 2,336$  oder angenähert auch  $k = 2$  (vgl. § 89).

Zieht man schließlich noch den Wirkungsgrad in Betracht, was namentlich bei den äußereren Lagen meistens unumgänglich ist, so bietet das kaum Anlaß zu weiteren Erörterungen. Denn es wird in § 86 nachgewiesen, daß bei trapezoidalnen Spulen der Winkel  $\alpha_1$  kaum geringer als  $40^\circ$  zu normieren sein wird; ein „Übergreifen“ von Armatur und Polspule kommt also hier niemals in Frage, wie es bei den Feldspulen in § 57 wohl der Fall war.

Derartige vorgelegte Polwindungen sind gelegentlich bei Zugmagneten angebracht worden, zumal sie auch die Erregung günstig beeinflussen; sie erschweren jedoch namentlich bei senkrechter Frontflansche die Übersicht, wenn auch nicht in so hohem Maße wie die Interpolarspulen bei Feldmagneten.

**§ 74. Prismenarmaturen.** Im zweidimensionalen Falle gibt es kein durchgehendes Analogon zu den vorigen Rechnungen. Nur der „Halbkegel“ findet entsprechenden Ausdruck in der Wirkung eines „Halbprismas“, d. h. einer einzelnen wirksamen Ebene statt eines Ebenenpaars. Es sei Fig. 15 links als Normalprofil betrachtet und es sei die Querabmessung,  $2c$ , nach der  $z$ -Achse zunächst einmal gering im Vergleich zu den übrigen Dimensionen gedacht. Man findet dann einfach:

$$d\mathfrak{H} = 2c \Im \frac{d\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}^2} = 2c \Im \sin^2 \alpha \frac{d\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}^2}$$

und nach Integration zwischen den Grenzen  $b$  und  $B$ :

$$\mathfrak{H} = 2c \mathfrak{J} \sin^2 \alpha \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right).$$

Ferner ergibt sich ähnlich wie vorstehend für die Zugkraft auf ein *gesättigtes* Partikel nach der  $x$ -Achse:

$$(80^*) \mathfrak{F}_x = \mathfrak{M} \int_b^B \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{d \mathfrak{H}}{d \mathfrak{y}} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x} d \mathfrak{y} = 2c \mathfrak{M} \mathfrak{J} \sin^3 \alpha \cos \alpha \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{B^2} \right),$$

mit einem Optimum für  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ$ .

Dagegen wird die auf ein *ungesättigtes* Partikel ausgeübte Zugkraft wie oben proportional.

$$(84^*) (\nabla |\mathfrak{H}|^2)_x = 8c^2 \mathfrak{J}^2 \sin^5 \alpha \cos \alpha \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right) \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{B^2} \right).$$

Der günstigste Winkel ist nunmehr  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{5} = 65^\circ 54'$ . Setzt man hingegen zweitens voraus, daß  $2c$  genügend groß ist, dann wird:

$$d \mathfrak{H} = 2 \mathfrak{J} \sin \alpha \frac{d \mathfrak{y}}{\mathfrak{y}},$$

$$\mathfrak{H} = 2 \mathfrak{J} \sin \alpha \log \frac{B}{b},$$

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{M} \frac{\partial |\mathfrak{H}|}{\partial x} = 2 \mathfrak{M} \mathfrak{J} \sin^2 \alpha \cos \alpha \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right),$$

mit einem Optimum für  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2} = 54^\circ 44'$ .

$$(\nabla |\mathfrak{H}|^2)_x = 8 \mathfrak{J}^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right) \log \frac{B}{b},$$

der günstigste Winkel ist  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ$ .

Zum Vergleich seien hier die Angaben aus Tab. 4 (§ 38) herangezogen, welche sich auf prismatische Ebenenpaare von genügender Länge  $2c$  beziehen; Formel (II), integriert nach  $\mathfrak{y}$  zwischen  $b$  und  $B$ , lautet für ein *gesättigtes* Partikel:

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{M} \frac{\partial |\mathfrak{H}|}{\partial x} = 4 \mathfrak{M} \mathfrak{J} \sin^2 \alpha \cos 2 \alpha \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right)$$

mit einem Optimum für  $\alpha = 30^\circ$ . Formel (IV) für ein *ungesättigtes* Partikel:

$$(\nabla |\mathfrak{H}|^2)_x = 32 \mathfrak{J}^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha \cos 2 \alpha \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right) \log \frac{B}{b};$$

der günstigste Winkel ist  $32^\circ 8'$ .

## VII. Eisenlose Zugspulen.

§ 75. Deren Wirkungen können bei genügender Kühlung schon für nicht allzu große Leistung — von der Ordnung 10 Kilowatt — erheblich werden und praktisch wäre gegen sie weniger einzuwenden als gegen armierte Feldspulen. Von einer schwierigen Zugänglichkeit des Spulenzentrums kann hier nicht die Rede sein, indem ja mindestens die Hälfte des Raumes naturgemäß freibleiben wird. Solche Gebilde sind übrigens auch sonst einer Reihe technischer Anwendungen fähig.

Bei den früher von mir l. c. beschriebenen Darmmagneten erreichte die Anziehung der kernlosen Spulen auf eine ungesättigte Magnetitpille an und für sich 10 Proz. des Gesamtwertes bei einer Belastung von 4 Amp./qmm. Steigerte man die Stromdichte während kurzer Zeit auf 7 Amp./qmm, so betrug jener Bruchteil bereits 17 Proz.; dies galt in 5 cm Entfernung von der Stirnfläche. An der Stelle maximaler Spulenwirkung betrug die rein elektrodynamische Zugkraft das Vierfache. Sie bleibt ferner fast proportional dem Quadrat der Stromdichte. Dagegen nähert sich die Anziehung des Kerns allein dem der Sättigung entsprechenden Werte, freilich nur langsam, weil die Stirnfläche eines Einzelkerns ceteris paribus weit geringere Magnetisierungswerte annimmt als das Armaturenpaar eines Feldmagnets.

Dabei ist das vom Eisenkern befreite Spulengewicht ziemlich gering, zumal bei Verwendung emaillierten Aluminiumdrahtes, und wird das Ganze weniger umfangreich und leichter hantierbar; dagegen würde die „Tiefenwirkung“ etwas ungünstiger ausfallen. Unter diesen Umständen bietet eine nähere Feststellung der günstigsten Anordnung Interesse, zudem die Rechnung hier präzise durchführbar ist. Geht man wieder aus von der Betrachtung des axialen Feldes eines Kreisleiters nach Gleichung (59) (Fig. 18 A):

$$d^2 \tilde{\Phi}_s = 2 \pi I \frac{\sin^2 \omega}{\varrho} = \frac{2 \pi \mathfrak{C}}{j} \sin^2 \omega d x \frac{dy}{y} = \frac{2 \pi \mathfrak{C}}{j} \sin^2 \omega d \omega \cdot d \varrho,$$

so folgt mit Berücksichtigung von  $\partial \omega / \partial x = \sin^2 \omega / y = \sin \omega / \varrho$

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (d^2 \tilde{\Phi}_s)}{\partial x} = 6 \pi I \frac{\sin^2 \omega \cos \omega}{\varrho^2} = \frac{6 \pi \mathfrak{C}}{j} \sin^4 \omega \cos \omega d x \frac{dy}{y^3} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{6 \pi \mathfrak{C}}{j} \frac{\sin^2 \omega \cos \omega}{\varrho} d \omega \cdot d \varrho, \end{array} \right.$$

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 (d^2 \tilde{H}_3)}{\partial x^2} = 6 \pi I \frac{\sin^2 \omega (5 \cos^2 \omega - 1)}{\varrho^8} \\ \quad = \frac{6 \pi \mathbb{C}}{j} \sin^5 \omega (5 \cos^2 \omega - 1) dx \frac{dy}{y^8}, \end{array} \right.$$

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (d^2 \tilde{H}_3)^2}{\partial x} = 24 \pi^2 I^2 \frac{\sin^4 \omega \cos \omega}{\varrho^8} = \frac{24 \pi^2 \mathbb{C}^2}{j^2} \sin^7 \omega \cos \omega (dx)^2 \\ \quad \frac{dy}{y^2} \frac{dy}{y} = \frac{24 \pi^2 \mathbb{C}^2}{j^2} \frac{\sin^4 \omega \cos \omega}{\varrho} (d\omega)^2 (d\varrho)^2; \end{array} \right.$$

ferner war nach § 60, Gleichung (60):

$$\begin{aligned} d^2 A &= \frac{2 \pi \sigma j I^2}{dx dy} \varrho \sin \omega = \frac{2 \pi \sigma \mathbb{C}^2}{j} dx \cdot y dy \\ &= \frac{2 \pi \sigma \mathbb{C}^2}{j} \sin \omega d\omega \cdot \varrho^2 d\varrho. \end{aligned}$$

Demnach zeigt  $\partial (d^2 \tilde{H}_3)/\partial x$  bei einem Kreisleiter von gegebenem Radius  $y$  einen Maximalwert für  $\omega = \arctg \sqrt{4} = 63^\circ 26'$  in demjenigen Achsenpunkte, welcher um den halben Radius von der Kreisebene entfernt liegt, wie es ja auch der Gau-gainschen Anordnung entspricht (§ 68). Demgemäß schwindet  $\partial^2 (d^2 \tilde{H}_3)/\partial x^2$  bei jenem Winkel und hat ein Maximum für  $\omega = \arctg \sqrt{\frac{4}{3}} = 49^\circ 6'$ . Dagegen erreicht  $\partial (d^2 \tilde{H}_3)^2/\partial x$  ein Maximum für  $\omega = \arctg \sqrt{7} = 69^\circ 18'$ , wie ich es früher gelegentlich bemerkte.<sup>1)</sup>

Für den zweidimensionalen Fall war nach § 61:

$$d^2 \tilde{H}_3 = 4 I \frac{\sin \omega}{\varrho} = \frac{4 \mathbb{C}}{j} \sin^2 \omega dx \cdot \frac{dy}{y} = \frac{4 \mathbb{C}}{j} \sin \omega d\omega \cdot d\varrho;$$

und es ergibt sich, da auch hier  $\partial \omega / \partial x = \sin^2 \omega / y = \sin \omega / \varrho$ :

$$(86^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (d^2 \tilde{H}_3)}{\partial x} = 8 I \frac{\sin \omega \cos \omega}{\varrho^2} = \frac{8 \mathbb{C}}{j} \sin^3 \omega \cos \omega dx \frac{dy}{y^2} \\ \quad = \frac{8 \mathbb{C}}{j} \frac{\sin \omega \cos \omega}{\varrho} d\omega d\varrho, \end{array} \right.$$

$$(87^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 (d^2 \tilde{H}_3)}{\partial x^2} = 8 I \frac{\sin \omega (4 \cos^2 \omega - 1)}{\varrho^3} \\ \quad = \frac{8 \mathbb{C}}{j} \sin^4 \omega (4 \cos^2 \omega - 1) dx \cdot \frac{dy}{y^3}, \end{array} \right.$$

$$(88^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (d^2 \tilde{H}_3)^2}{\partial x} = 64 I^2 \frac{\sin^3 \omega \cos \omega}{\varrho^8} = \frac{64 \mathbb{C}^2}{j^2} \sin^5 \omega \cos \omega (dx)^2 \frac{dy}{y^2} \frac{dy}{y} \\ \quad = \frac{64 \mathbb{C}^2}{j^2} \frac{\sin^2 \omega \cos \omega}{\varrho} (d\omega)^2 (d\varrho)^2. \end{array} \right.$$

1) H. du Bois, Magnetische Kreise, p. 265. Berlin 1894.

Ferner findet man für  $A_1$ , die Leistung pro Längeneinheit:

$$d^2 A_1 = \frac{2 \sigma j I^2}{d x d y} = \frac{2 \sigma \mathbb{E}^2}{j} d x d y = \frac{2 \sigma \mathbb{E}^2}{j} d \omega \cdot \varrho d \varrho.$$

§ 76. *Glomeratrixkurven*. Dem Kelvin-Maxwellschen Gedankengange folgend, findet man ähnlich wie in § 60 Meridianankurven der geofnetrischen Örter entsprechend:

*A*, einer gegebenen Anziehung eines Kreisleiters auf ein ferromagnetisches Partikel.

*B*, der „spezifischen“ Anziehung, d. h. einer möglichst niederwattigen — also ökonomischsten — Anordnung von Kreisleitern.

*C*, dem zweidimensionalen Falle, wo die Kurven *A* und *B* für gerade Stromleiter identisch werden.

Und zwar ergibt sich für ein *gesättigtes* Partikel nach Gleichung (86) ohne weiteres:

(XIIA)  $\varrho^2 = p^2 \sin^2 \omega \cos \omega$ ,  $(x^2 + y^2)^5 - p^4 x^2 y^4 = 0$ , ein Quadrifolium, symmetrisch zur *x*- und *y*-Achse. Und nach Division durch  $d^2 A$  nach Gleichung (60) wegen der für diesen Fall geltenden einfachen Additivität:

(XIIIB)  $\varrho^3 = p^3 \sin \omega \cos \omega$ ,  $(x^2 + y^2)^5 - p^6 x^2 y^2 = 0$ ,

ebenfalls vierblättrig (Fig. 18), symmetrisch zur *x*- und *y*-Achse und zur Diagonalen bei  $45^\circ$ . Aus Gleichung (86\*) ergibt sich sodann unmittelbar für den zweidimensionalen Fall:

(XIIIC)  $\varrho^2 = p^2 \sin \omega \cos \omega$ ,  $(x^2 + y^2)^2 - p^2 x y = 0$ ,

die gewöhnliche Lemniskate, deren Blätter im 1. und 3. Quadrant liegen.

Für ein *ungesättigtes* Partikel findet man dagegen aus Gleichung (88) ohne weiteres als Ort der Kreisleiter mit gleicher Zugkraft:

(XIIIA)  $\varrho^3 = p^3 \sin^4 \omega \cos \omega$ ,  $(x^2 + y^2)^4 - p^3 x y^4 = 0$ ,

ein symmetrisches Bifolium im 1. und 2. Quadrant. Für die möglichst niederwattige Anordnung findet man hier in ziemlich umständlicher Weise mit sehr großer Annäherung (§ 82):

(XIIIB)  $\varrho^{24} = p^{24} \sin^7 \omega \cos^3 \omega$ ,  $(x^2 + y^2)^{17} - p^{24} x^3 y^7 = 0$ ,

ein asymmetrisches Zweiblatt (Fig. 19) im 1. und 3. Quadrant. Für niederwattige Zugspulen kommen offenbar wesentlich (XIIIB) und (XIIIB) in Betracht, und zwar nur im ersten Quadrant.

§ 77. Vom allgemeineren geometrischen Standpunkt sind obige Gleichungen Spezialfälle des Schemas:

$$(89) \quad \rho^l = p^l \sin^m \omega \cos^n \omega,$$

wo  $p$  einen linearen Parameter,  $l$ ,  $m$  und  $n$  positive ganze Exponenten bedeuten. Die Haupteigenschaften dieser Blattkurven habe ich für den vorliegenden Zweck zunächst rein geometrisch zu diskutieren versucht und für sie den Namen „*Glomeratrix*“ vorgeschlagen.<sup>1)</sup> Von den Ergebnissen sei hier folgendes erwähnt: Für gegebene Exponenten sind die Kurven ähnlich, und ihre Abmessungen werden dann durch den einzigen Parameter  $p$  bestimmt, dessen Quadrat der Blattinhalt proportional ist. Die Höchstwerte der Abszisse und Ordinate sowie des Radiusvektors liegen<sup>2)</sup> bei Winkelwerten

$$\arctg \sqrt{\mu/(\nu+1)} \quad \text{und} \quad \arctg \sqrt{(\mu+1)/\nu} \quad \text{bzw.} \quad \arctg \sqrt{\mu/\nu},$$

wo abgekürzt  $\mu = m/l$  und  $\nu = n/l$  gesetzt ist. Hieraus findet man den Inhalt des umgeschriebenen Tangentenrechtecks; die Quadratur der Kurve selbst führt auf Gammafunktionen, indem der Blattinhalt:

$$S = \frac{1}{4} p^2 \frac{\Gamma(\mu + \frac{1}{2}) \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\mu + \nu + 1)}.$$

Spulenvolum und Schwerpunktskoordinaten lassen sich ebenfalls durch Gammafunktionen darstellen. Diese sind übrigens für spezielle Argumente, z. B.  $1/4$ ,  $1/6$  bzw.  $3/4$ ,  $5/6$  usw. auch durch elliptische Integrale darstellbar. Falls  $\mu = \nu$ ,

1) Vom lateinischen „*glomerare*“ = zu einer Spule aufhaspeln bzw. wickeln. H. du Bois, Versl. Akad. Amsterd. 24, p. 1451. 1916; Arch. d. Math. u. Phys. (3) 26. 1917.

2) Der Ausdruck  $\sin^m \omega \cos^n \omega$  hat ein Maximum zwischen 0 und  $\pi/2$  für  $\omega = \arctg \sqrt{m/n} = \arccot \sqrt{n/m}$ ; daher die in vorliegender Untersuchung immer wiederkehrenden Winkel, deren Tangenten bzw. Kotangentialen Wurzeln aus ganzen Zahlen zwischen 1 und 7 sind, und zwar

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} \tan \omega = \sqrt{1} & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{4} & \sqrt{5} & \sqrt{6} & \sqrt{7} \\ \omega = 45^\circ & 54^\circ 44' & 60^\circ & 63^\circ 26' & 65^\circ 54' & 67^\circ 48' & 69^\circ 18' \end{array}$$

werden die Kurven symmetrisch zum Radiusvektor bei  $45^\circ$ . Die orthogonalen Trajektorien der Kurve (89) sind

$$\rho^{2(m+n)} = \pm p^{2(m+n)} \left( \frac{m+n}{n} \cos^2 \omega - 1 \right)^l;$$

sie sind bissymmetrisch bezüglich der Koordinatenachsen. Die Eigenschaften der Multiplikatrixkurven (§ 60) folgen mutatis mutandis ohne weiteres aus den allgemeinen Gleichungen. Auf einer Meridiankurve soll die Stromdichte konstant sein; diese hängt also nur von dem Parameter  $p$  ab. Setzt man  $\mathfrak{C} = P_k / p^k$ , so kann man  $k$  den Schichtungsexponent der Stromdichte nennen. Wenn  $u = k \mu$  und  $v = k \nu$  gesetzt wird, ist allgemein:

$$(XIV) \quad \rho^k = \frac{P_k}{\mathfrak{C}} \sin^u \omega \cos^v \omega.$$

§ 78. *Symmetrisches Quadrifolium* (XII B) (Fig. 18). Die Kurve berührt die Koordinatenachsen im Symmetriezentrum;

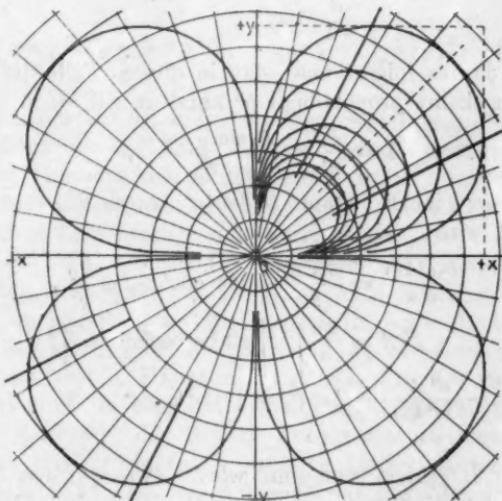


Fig. 18.

sie ist auch symmetrisch zum maximalen Radiusvektor bei  $45^\circ$ ; das umgeschriebene Quadrat wird in der Mitte seiner

Kanten berührt bei  $\omega = \arccot \sqrt{4} = 26^\circ 34'$  und  $\omega = \arctg \sqrt{4} = 63^\circ 26'$ . Aus der Gleichung (XIIB)

$$\varrho^3 = p^3 \sin \omega \cos \omega = \frac{1}{2} p^3 \sin 2\omega$$

findet man durch Quadratur eines Blattes dessen Inhalt:

$$S = \frac{1}{4} p^2 \frac{\Gamma^2(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} = \frac{1}{4} p^2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \sqrt{2} \left( \sqrt{3} E - \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} K \right) = 0,3529 p^2;$$

der Modul der vollständigen elliptischen Integrale beträgt:

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sin 15^\circ.$$

Theoretisch ist nun eine Zugspule für *gesättigte* Partikel einer solchen Kurvenschar gemäß zuwickeln bei beliebiger Gestaltung des inneren Hohlraumes. Durch ein dem Maxwellischen nachgebildetes Variationsverfahren<sup>1)</sup> läßt sich ferner zeigen, daß

$$\frac{\frac{d}{d \mathfrak{E}} \left( \frac{\partial (\delta \mathfrak{H}_0)}{\partial x} \right)}{\frac{d}{d \mathfrak{E}} (\delta A)} = \text{const.}$$

sein soll; daraus folgert man, daß in diesem Falle die Stromdichte umgekehrt proportional  $p^3$  abfallen soll, d. h.

$$\mathfrak{E} = \frac{P_3}{p^3} = \frac{P_3 \sin \omega \cos \omega}{\varrho^3},$$

wo  $P_3$  wieder eine Konstante bedeutet; durch Einsetzen dieser Bedingung wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (d^3 \mathfrak{H}_0)}{\partial x} &= \frac{6\pi P_3}{j} \sin^3 \omega \cos^2 \omega d\omega \frac{d\varrho}{\varrho^4}, \\ d^3 A &= \frac{2\pi \sigma P_3^{\frac{2}{3}}}{j} \sin^3 \omega \cos^2 \omega d\omega \frac{d\varrho}{\varrho^4}, \\ \frac{d^3 A}{\partial (d^3 \mathfrak{H}_0)} &= \frac{1}{3} \sigma P_3 = \frac{1}{3} \sigma p^3 \mathfrak{E}. \end{aligned}$$

§ 79. Integriert man nun wieder zwischen den Grenzen  $0 < \omega < \pi/2$  und  $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$ , so wird eine innere „Wirkungssphäre“ (Radius  $\varrho_1$ ) von der Spule umschlossen; man findet:

1) J. C. Maxwell, 1. c. 2. p. 333; E. Mascart u. J. Joubert, 1. c. 2. p. 100.

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_3}{\partial x} = \frac{6\pi}{j} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \omega \cos^2 \omega d\omega \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d\varrho}{\varrho^4} = \frac{4\pi}{15} \frac{P_3}{j} \left( \frac{1}{\varrho_1^5} - \frac{1}{\varrho_2^5} \right),$$

$$A = \frac{2\pi \sigma P_3^2}{j} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \omega \cos^2 \omega d\omega \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d\varrho}{\varrho^4} = \frac{4\pi}{45} \frac{\sigma P_3^2}{j} \left( \frac{1}{\varrho_1^5} - \frac{1}{\varrho_2^5} \right).$$

Es folgt:

$$(90) \quad \frac{A}{\frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_3}{\partial x}} = \frac{1}{3} \sigma P_3 = \frac{1}{3} \sigma p^3 \mathfrak{C}, \quad \left( \frac{A}{\frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_3}{\partial x}} \right)^2 = \frac{5}{4\pi} \sigma j \varrho_1^3, \quad [\varrho_2 = \infty]$$

Die parametrische Integration (vgl. § 62) wird in diesem Falle noch einfacher, indem  $d p/p^4 \sin \omega \cos \omega$  statt  $d \varrho/\varrho^4$  einzuführen ist, so daß:

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_3}{\partial x} = \frac{6\pi}{j} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \omega \cos \omega d\omega \int_{p_1}^{p_2} \frac{d p}{p^4} = \frac{2\pi}{3} \frac{P_3}{j} \left( \frac{1}{p_1^5} - \frac{1}{p_2^5} \right),$$

$$A = \frac{2\pi \sigma P_3^2}{j} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \omega \cos \omega d\omega \int_{p_1}^{p_2} \frac{d p}{p^4} = \frac{2\pi}{9} \frac{\sigma P_3^2}{j} \left( \frac{1}{p_1^5} - \frac{1}{p_2^5} \right).$$

Mithin:

$$(91) \quad \frac{A}{\frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_3}{\partial x}} = \frac{1}{3} \sigma P_3 = \frac{1}{3} \sigma p^3 \mathfrak{C}, \quad \left( \frac{A}{\frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_3}{\partial x}} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \sigma j p_1^3, \quad [p_2 = \infty]$$

Demnach steht bei dieser stetigen Schichtung der Stromdichte, gleich wie die Spule begrenzt sei, die aufzuwendende elektrische Leistung sowohl im ganzen wie in den einzelnen Spulenteilen überall im gleichen Verhältnis  $\sigma P_3/3$  zu der gewünschten Zugwirkung, und zwar wegen deren einfacher Additivität. Wegen dieser Unveränderlichkeit der spezifischen Zugwirkung (vgl. § 60) ist es gleichgültig welcher beliebige Teil des Kurvenbildes als Meridianschnitt einer Spulenwicklung angenommen wird, sofern  $\sigma$  und  $P_3$  vorgegeben sind.

Die im ersten Hauptquadrant der Fig. 18 eingezeichnete Kurvenschaar begrenzt sichelförmige Abschnitte, deren Inhalt proportional der dritten Potenz des mittleren Parameters ist, mithin obigem Ansatz gemäß konstanten Strommengen entspricht. Da dessen Beweis mit Hilfe des erwähnten Variationsverfahrens als ein etwas gekünstelter erscheint, seien die Werte der Exponenten  $k, u, v$  in der Gleichung (XIV) hier noch in direkterer Weise unter Heranziehung der Eigenschaften der Gamma- und Psi-Funktionen hergeleitet.

§ 80. Aus jener allgemeinen Gleichung für die Blattkurven folgt der Wert der variablen Stromdichte:

$$\mathfrak{C} = P_k \frac{\sin^u \omega \cos^v \omega}{\varrho^k},$$

den man nun in die Gleichung (60) für  $d^2 A$ , (59) für  $d^2 \mathfrak{H}_3$  und (86) für  $\partial (d^2 \mathfrak{H}_3) / \partial x$  einzusetzen hat; die obere Grenze der sich ergebenden Integrale sei der Einfachheit halber von vornherein  $\varrho_2 = \infty$  gesetzt; man findet:

$$A = \frac{2 \pi \sigma P_k^2}{j} \int_{\varrho_1}^{\infty} \frac{d \varrho}{\varrho^{2k-2}} \int_0^{\pi/2} \sin^{2u+1} \omega \cos^{2v} \omega d \omega,$$

oder

$$A = \frac{\pi \sigma P_k^2}{j} \frac{1}{(2k-3) \varrho_1^{2k-3}} \frac{\Gamma(u+1) \Gamma(v+\frac{1}{2})}{\Gamma(u+v+\frac{3}{2})}.$$

Ferner:

$$\mathfrak{H}_3 = \frac{2 \pi P_k}{j} \int_{\varrho_1}^{\infty} \frac{d \varrho}{\varrho^k} \int_0^{\pi/2} \sin^{u+2} \omega \cos^v \omega d \omega,$$

oder

$$\mathfrak{H}_3 = \frac{\pi P_k}{j} \frac{1}{(k-1) \varrho_1^{k-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{u}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{5}{2}\right)}.$$

Schließlich

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_3}{\partial x} = \frac{6 \pi P_k}{j} \int_{\varrho_1}^{\infty} \frac{d \varrho}{\varrho^{k+1}} \int_0^{\pi/2} \sin^{u+2} \omega \cos^{v+1} \omega d \omega.$$

Oder nach Quadrierung behufs Eliminierung von  $P_k^2$ :

$$\left( \frac{\partial \mathfrak{H}_3}{\partial x} \right)^2 = \frac{9 \pi^2 P_k^2}{j^2} \frac{1}{k^2 \varrho_1^{2k}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{u}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{v}{2} + 1\right)}{\Gamma^2\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{5}{2}\right)}.$$

§ 81. Für gesättigte Partikel ergibt die Division:

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{\left( \frac{\partial \mathfrak{H}_3}{\partial x} \right)^2} = \frac{1}{9 \pi} \sigma j \varrho_1^3 \frac{k^3}{2k-3} \\ \frac{\Gamma(u+1) \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{5}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{u}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{v}{2} + 1\right) \Gamma\left(u+v+\frac{3}{2}\right)} \end{array} \right.$$

Zunächst ist zu bemerken, daß der einer Integration nach  $\varrho$  entspringende Bruch  $k^2/(2k-3)$  für  $k=3$  den geringsten Wert 3 durchläuft. Das Minimum des letzten  $\Gamma$ -Ausdrückes bestimmt man, indem man seinen Logarithmus nach  $u$  bzw.  $v$  differenziert; unter Berücksichtigung der bekannten Beziehung:

$$\frac{d \log \Gamma(u+1)}{d(u)} = \psi(u+1) = -\gamma + \int_0^1 \frac{x^u - 1}{x-1} dx = \Psi(u)$$

ergibt die Differentiation nach  $u$  die Bedingung:

$$\int_0^1 \frac{x^u - 1 + x^{\frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{3}{2}} - 1 - x^{\frac{u}{2} + \frac{1}{2}} + 1 - x^{u+v+\frac{1}{2}} + 1}{x-1} dx = 0.$$

Die Derivierte des Logarithmus nach  $v$  muß ebenfalls schwinden, was folgende Gleichung liefert:

$$\int_0^1 \frac{x^{v-\frac{1}{2}} - 1 + x^{\frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{3}{2}} - 1 - x^{\frac{v}{2}} + 1 - x^{u+v+\frac{1}{2}} + 1}{x-1} dx = 0.$$

Die Euler-Mascheronische Konstante ( $\gamma = 0,57721 \dots$ ) hebt sich überall heraus. Es leuchtet nun ohne weiteres ein, daß für  $u=v=1$  die Integrandenzähler identisch gleich Null werden, und zwar für jeden beliebigen  $x$ -Wert zwischen den Grenzen 0 und 1. Schließlich genügen also die Exponenten  $k=3$ ,  $u=1$ ,  $v=1$  oder  $\mu=u/k=\frac{1}{3}$  und  $\nu=v/k=\frac{1}{3}$  den gewünschten Maximalbedingungen, in Übereinstimmung mit dem Vorigen. Setzt man diese Werte in die vorige Gleichung (92) ein, so werden die Gammafunktionen elementar und man erhält wie oben Gleichung (90):

$$\frac{A}{\left(\frac{\partial \mathfrak{V}_s}{\partial x}\right)^2} = \frac{1}{9\pi} \sigma j \varrho_1^3 \frac{3 \cdot 15}{4} = \frac{5}{4\pi} \sigma j \varrho_1^3.$$

§ 82. *Asymmetrisches Bifolium* (XIII B). Für *ungesättigte* Partikel gestalten sich die Formeln weniger einfach. Unter Beibehaltung der Annahme, daß bei einer inneren Wirkungssphäre vom Radius  $\varrho_1$  das günstigste Profil ebenfalls einer Schar Glomeratrixkurven entspricht, sind nun deren Ex-

ponenten zu bestimmen; und zwar folgt aus obigen Gleichungen für  $\mathfrak{H}_3$  und  $\partial \mathfrak{H}_3 / \partial x$ :

$$\nabla \mathfrak{H}_3^2 = 2 \mathfrak{H}_3 \frac{\partial \mathfrak{H}_3}{\partial x} = \frac{6 \pi^3 P_k^3}{j^3} \frac{1}{k(k-1) q_1^{2k-1}} \cdot \frac{\Gamma^2 \left( \frac{u}{2} + \frac{3}{2} \right) \Gamma \left( \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{v}{2} + 1 \right)}{\Gamma \left( \frac{u}{2} + \frac{v}{2} + 2 \right) \Gamma \left( \frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{5}{2} \right)};$$

und nach Division in die Gleichung für  $A$ :

$$\frac{A}{\nabla \mathfrak{H}_3^2} = \frac{1}{6\pi} \sigma j q_1^2 \frac{k(k-1)}{2k-3} \cdot \frac{\Gamma(u+1) \Gamma \left( v + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{u}{2} + \frac{v}{2} + 2 \right) \Gamma \left( \frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{5}{2} \right)}{\Gamma^2 \left( \frac{u}{2} + \frac{3}{2} \right) \Gamma \left( \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{v}{2} + 1 \right) \Gamma \left( u + v + \frac{3}{2} \right)}$$

Hier durchläuft der aus der Integration nach  $\varrho$  stammende Bruch  $k(k-1)/(2k-3)$  seinen geringsten Wert 1,8660 für  $k = (3 + \sqrt{3})/2 = 2,3660$ . Ferner ergibt die Differentiation des Logarithmus des die Gammafunktionen enthaltenden Ausdrucks nach  $u$  bzw.  $v$  in diesem Falle die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \psi(u+1) + \frac{1}{2} \psi \left( \frac{u}{2} + \frac{v}{2} + 2 \right) + \frac{1}{2} \psi \left( \frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{5}{2} \right) \\ - \psi \left( \frac{u}{2} + \frac{3}{2} \right) - \psi \left( u + v + \frac{3}{2} \right) = 0, \\ \psi \left( v + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \psi \left( \frac{u}{2} + \frac{v}{2} + 2 \right) + \frac{1}{2} \psi \left( \frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \frac{5}{2} \right) \\ - \frac{1}{2} \psi \left( \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \psi \left( \frac{v}{2} + 1 \right) - \psi \left( u + v + \frac{3}{2} \right) = 0; \end{aligned}$$

die Konstanten  $\gamma$  kommen wieder in Fortfall. Da die Integranden in diesem Falle nicht durchweg identisch zum Schwinden zu bringen sind, wie es in § 81 geschah, führt man am besten die Gaußschen  $\psi$ -Funktionen für Argumente zwischen 0 und 1 ein, weil hierfür eine von Nicolai berechnete Tabelle<sup>1)</sup> vorliegt. Hierfür gelten Reduktionsformeln wie z. B.:

$$\psi \left( \frac{u}{2} + \frac{v}{2} + 2 \right) = \psi \left( \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \right) + \frac{1}{\frac{u}{2} + \frac{v}{2} + 1}.$$

1) F. B. G. Nicolai, in C. F. Gauss' Werke 8. p. 161, Göttingen 1866.

Diese Hilfsmittel führen zum Ergebnis, daß den beiden Bedingungsgleichungen genügt wird durch die Werte  $u = 0,7063$  und  $v = 1 - u = 0,2937$ , welche als Minimum des  $I$ -Bruches den Wert 1,891197 liefern. Division durch die Zahl  $k = 2,3660$

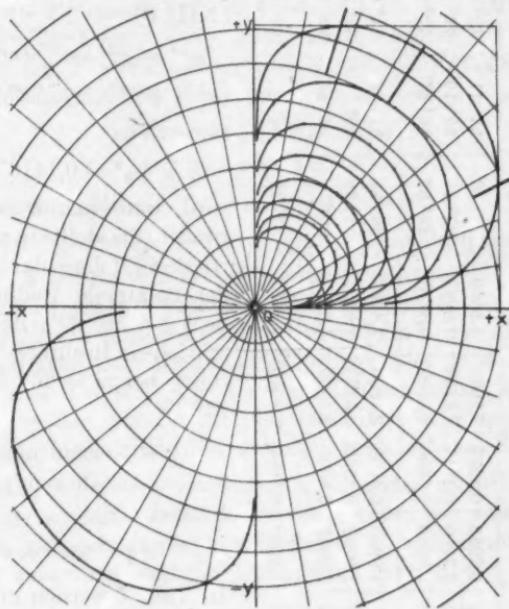


Fig. 19.

ergibt schließlich  $\mu = 0,2985$  und  $\nu = 0,1241$ . Setzt man diese Werte ein, so findet man<sup>1)</sup>:

$$\nabla \tilde{\Phi}_3^2 = 8,0192 \frac{P_h^3}{j^3 \varrho_1^{5,728}}, \quad A = 1,4537 \frac{\sigma P_h^3}{j \varrho_1^{1,728}},$$

$$\frac{A}{\nabla \tilde{\Phi}_3^2} = 0,18128 \sigma j \varrho_1^2.$$

Die Optimalgleichung lautet demnach streng:

$$\varrho^{2,3660} = \frac{P}{\mathfrak{C}} \sin^{0,7063} \omega \cos^{0,2937} \omega \quad \text{oder} \quad \varrho = p \sin^{0,2985} \omega \cos^{0,1241} \omega.$$

1) Mittels der zwölfstelligen Logarithmen der Gammafunktionen bei O. Schlömilch, Analyt. Studien 1. p. 185, Leipzig 1848.

Tabelle 7.

l	m	n	μ	ν	u	v	k	k(k-1)	arcusangens:			$\sigma j \varrho_1^2 \times$	
									$\sqrt{\frac{m}{n+l}}$	$\sqrt{\frac{m}{n}}$	$\sqrt{\frac{m+l}{n}}$		
I	2,3660	0,7063	0,2937	0,2985	0,1241	0,7063	0,2897	2,9660	1,8660	21° 16'	57° 11'	0,18128	
II	40	12	5	0,3000	0,1250	0,7000	0,2917	2,3338	1,8667	21° 19'	57° 10'	0,18134	
III	24	7	8	0,2917	0,1250	0,7000	0,3000	2,4000	1,8667	26° 59'	56° 47'	0,18135	
IV	12	5	2	0,4167	0,1667	1,0000	0,4000	2,4000	1,8667	30° 52'	57° 41'	71° 4'	0,18194
V	7	8	1	0,4286	0,1429	1,0000	0,3333	2,3333	1,8667	31° 29'	60°	72° 27'	0,18203
VI	5	2	1	0,4000	0,2000	1,0000	0,5000	2,5000	1,8750	30°	54° 44'	69° 18'	0,18360
VII	4	3	1	0,7500	0,2500	1,8000	0,6000	2,4000	1,8667	37° 46'	60°	69° 18'	0,18670

Erhebt man erstere zur 10. Potenz und rundet auf ganze Zahlen ab, so erhält man schließlich die in § 76 bereits angeführte Gleichung (XIII B):

$$\varrho^{24} = p^{24} \sin^7 \omega \cos^3 \omega, \\ (x^2 + y^2)^{17} - p^{24} x^3 y^7 = 0,$$

für welche

$A / \nabla \mathfrak{H}_3^2 = 0,18135 \sigma j \varrho_1^2$  wird, wenn man  $k = 2,4$  abrundet. Sie stellt ein asymmetrisches Bifolium dar (Fig. 19); der maximale Radiusvektor liegt bei  $56^\circ 47'$ ; das umgeschriebene Rechteck wird berührt bei  $\omega = 26^\circ 59'$  und  $72^\circ 43'$ .

§ 83. Eine noch etwas bessere Annäherung gibt die Formel

$$\varrho^{40} = p^{40} \sin^{12} \omega \cos^5 \omega.$$

In Tab. 7 werden diese und andere Exponenten übersichtlich verglichen.

Die den Berührungs punkten entsprechenden Winkel sowie der Zahlenkoeffizient von  $A / \nabla \mathfrak{H}_3^2$  sind hier zusammengestellt; wie ersichtlich, schwankt letzterer nur sehr wenig angesichts der recht verschiedenen Werte der gewählten Exponenten. Die drei vorletzten Formeln (IV), (V), (VI) sind elementar zu berechnen, weil dort

$u = k \mu = 1$ ; die Gammafunktionen kommen dann in Fortfall, indem der sie enthaltende Bruch entartet in die einfachere Form:

$$\frac{(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)}{4(2v+1)(2v+3)},$$

welche ein Minimum 1,88690 durchläuft für  $v = 0,3790$ . Insbesondere ist Formel (IV) auch zu betrachten als „Mittel“ zwischen der Playfairschen Kurve und dem symmetrischen Quadrifolium gleichen Parameters, derart daß

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho = p \sin^{\frac{1}{2}} \omega \cos^0 \omega \\ \varrho = p \sin^{\frac{1}{2}} \omega \cos^{\frac{1}{2}} \omega \end{array} \right.$$

Geometrisches „Mittel“  $\bar{\varrho} = p \sin^{\frac{1}{2}} \omega \cos^{\frac{1}{2}} \omega$ ,

während der geometrische Mittelwert der Schichtungsexponenten  $\bar{k} = \sqrt{2 \cdot 3} = 2,4495$  betragen würde. Die letzte Formel (VII) hatte ich in einer vorläufigen Mitteilung<sup>1)</sup> als die in erster Annäherung allereinfachste diskutiert und die Kurve abgebildet; die Quadratur des Blattinhaltes gelingt hier in elementarer Weise, weil  $l = m + n = 4$ . Der Zahlenkoeffizient ist nur 3 Proz. größer als bei der Optimalkurve und immer noch sehr viel kleiner als bei den technisch realisierbaren Zugspulen.

§ 84. Da es sich demnach um ein außerordentlich flaches Minimum handelt, verlohnt es sich kaum zu untersuchen, ob man es noch etwas herabdrücken könnte durch Heranziehung zusammengesetzter Glomeratrixkurven:

$$\varrho = p \sum g \sin^{\mu} \omega \cos^{\nu} \omega,$$

wo die Konstante  $g$  und die Exponenten  $\mu$  und  $\nu$  verschiedene Werte annehmen könnten, zumal es auch hier weit mehr auf den Schichtungsexponent  $k$  ankommt.

Die Kurvenschar der Fig. 19 umfaßt Sicheln, deren Inhalt proportional  $\sqrt[3]{\bar{p}^{12}}$  wächst, also wieder einer konstanten Strommenge entspricht.

Zusammenfassend ergibt sich schließlich, daß das Gleichungsschema (XIV)

$$\varrho^k = \frac{P_s}{\mathfrak{C}} = \sin^u \omega \cos^v \omega$$

alle besprochenen Fälle umfaßt, wie nachstehend angegeben.

1) H. du Bois, Versl. Akad. Amsterd. 24. p. 1458. 1916.

Tabelle 8.

Spulenart	Rundspulen				Zylindr. Spulen			
	<i>k</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>u + v</i>	<i>k</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>u + v</i>
Feldspulen	2	1	0	1	1	1	0	1
Zugspulen (gesättigt)	3	1	1	2	2	1	1	2
Zugspulen (ungesättigt)	2,3660	0,7063	0,2937	1	—	—	—	—

Diese Verallgemeinerung des für Galvanometerspulen Bekannten bietet ein gewisses theoretisches Interesse. Praktisch hat sie insofern Wert, als sie die genaue Berechnung des überhaupt denkbaren Optimums gestattet, und daher das Defizit, um welches man mit technisch herstellbaren Spulen für mehr oder weniger starke Ströme hinter jenen komplizierteren Idealgebilden zurückzubleiben genötigt ist.

§ 85. *Trapezoidale Spulenprofile* mit zylindrisch geschichteter Stromdichte kommen hierfür wieder vorwiegend in Betracht (Fig. 20). Zunächst sind die Differentiale (59) und (86)

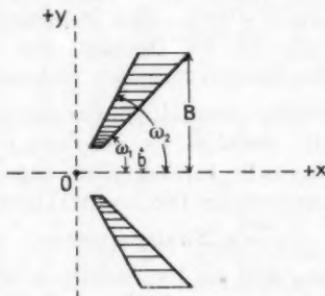


Fig. 20.

des § 75 für konstantes  $y$  nach  $\omega$  zu integrieren, wobei  $d y = \sin \omega d \varrho$ ; es ergibt sich:

$$d\tilde{\Phi}_3 = \int d^2 \tilde{\Phi}_3 = \frac{2\pi \mathfrak{E}}{j} dy \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin \omega d\omega = \frac{2\pi \mathfrak{E}}{j} (\cos \omega_1 - \cos \omega_2) dy,$$

$$\frac{\partial (d\tilde{\Phi}_3)}{\partial x} = \int \frac{\partial (d^2 \tilde{\Phi}_3)}{\partial x} = \frac{6\pi \mathfrak{E}}{j} \frac{dy}{y} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin^3 \omega \cos \omega d\omega$$

$$= \frac{2\pi \mathfrak{E}}{j} (\sin^3 \omega_2 - \sin^3 \omega_1) \frac{dy}{y},$$

$$\begin{aligned}\nabla (d \tilde{\mathfrak{H}}_3)^2 &= 2 d \tilde{\mathfrak{H}}_3 \frac{\partial (d \tilde{\mathfrak{H}}_3)}{\partial x} \\ &= \frac{8 \pi^2 \mathfrak{C}^2}{j^3} (\sin^3 \omega_2 - \sin^3 \omega_1) (\cos \omega_1 - \cos \omega_2) d y \frac{d y}{y}, \\ d A &= \int d^2 A = \frac{2 \pi \sigma \mathfrak{C}^2}{j} y^2 d y \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d \omega}{\sin^2 \omega} \\ &= \frac{2 \pi \sigma \mathfrak{C}^2}{j} (\cot \omega_1 - \cot \omega_2) y^2 d y.\end{aligned}$$

Der Abfall der Stromdichte sei zunächst durch  $\mathfrak{C} = C_k / y^k$  ausgedrückt; dann erhält man nach Einsetzen dieses Wertes und Integration nach  $y$  zwischen  $b$  und  $B$ , wobei also ein Hohlzylinder vom Radius  $b$  umschlossen wird und  $B/b$  wieder  $= w$  gesetzt sei:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{H}}_3 &= \int d \tilde{\mathfrak{H}}_3 = \frac{2 \pi C_k}{j} (\cos \omega_1 - \cos \omega_2) \frac{1}{k-1} \left( \frac{1}{b^{k-1}} - \frac{1}{B^{k-1}} \right), \\ \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_3}{\partial x} &= \int \frac{\partial (d \tilde{\mathfrak{H}}_3)}{\partial x} = \frac{2 \pi C_k}{j} (\sin^3 \omega_2 - \sin^3 \omega_1) \frac{1}{k} \left( \frac{1}{b^k} - \frac{1}{B^k} \right), \\ \nabla \tilde{\mathfrak{H}}_3^2 &= 2 \tilde{\mathfrak{H}}_3 \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_3}{\partial x} = \frac{8 \pi^2 C_k^2}{j^4} (\sin^3 \omega_2 - \sin^3 \omega_1) (\cos \omega_1 - \cos \omega_2) \\ &\quad \frac{1}{k(k-1)} \left( \frac{1}{b^k} - \frac{1}{B^k} \right) \left( \frac{1}{b^{k-1}} - \frac{1}{B^{k-1}} \right), \\ A &= \int d A = \frac{2 \pi \sigma C_k^2}{j} (\cot \omega_1 - \cot \omega_2) \frac{1}{2k-3} \\ &\quad \left( \frac{1}{b^{2k-3}} - \frac{1}{B^{2k-3}} \right),\end{aligned}$$

$$(93) \quad \frac{A}{\left( \frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_3}{\partial x} \right)^2} = \frac{\sigma j b^3}{2 \pi} \frac{\cot \omega_1 - \cot \omega_2}{(\sin^3 \omega_2 - \sin^3 \omega_1)^2} \cdot \frac{k^3}{2k-3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{w^{2k-3}}}{1 - \frac{1}{w^{2k}}},$$

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{\nabla \tilde{\mathfrak{H}}_3^2} = \frac{\sigma j b^3}{4 \pi} \frac{\cot \omega_1 - \cot \omega_2}{(\sin^3 \omega_2 - \sin^3 \omega_1) (\cos \omega_1 - \cos \omega_2)} \frac{k(k-1)}{2k-3} \\ \qquad \qquad \qquad \frac{1 - \frac{1}{w^{2k-3}}}{\left( 1 - \frac{1}{w^{k-1}} \right) \left( 1 - \frac{1}{w^k} \right)} \end{array} \right.$$

Je größer  $w$  wird, um so mehr konvergieren die betreffenden Brüche gegen Eins.

§ 86. Für *gesättigte* Partikel betrug der überhaupt erreichbare günstigste Mindestwert von  $A/(\partial \mathfrak{H}_3/\partial x)$  nach § 79, Gleichung (90),  $\sigma P_3/8$ , falls  $\mathfrak{C}$  proportional  $p^{-3}$ . Setzt man nun zum Vergleich auch in obiger Formel (93)  $k = 3$ , so findet man für  $w = \infty$ :

$$\frac{A}{\partial \mathfrak{H}_3} = \sigma C_3 \frac{\cot \omega_1 - \cot \omega_2}{\sin^3 \omega_2 - \sin^3 \omega_1}, \quad \left( \frac{A}{\partial x} \right)^2 = \frac{3}{2 \pi} \sigma j b^3 \frac{\cot \omega_1 - \cot \omega_2}{(\sin^3 \omega_2 - \sin^3 \omega_1)^2}.$$

Ferner ist  $P_3 = \mathfrak{C} \varrho^3 / \sin \omega \cos \omega$  und  $C_3 = \mathfrak{C} y^3 = \mathfrak{C} \varrho^3 \sin^3 \omega$ ; unter Annahme gleicher Stromdichte bei gleichem Radiusvektor und Winkel in beiden Fällen wird demnach  $P_3 = C_3 / \sin^4 \omega \cos \omega$ , und beim günstigsten Winkel von  $63^\circ 26'$  hat man  $P_3 = C_3 / 0,2862$  zu setzen, oder  $A/(\partial \mathfrak{H}_3/\partial x) = 1,164 \sigma C_3$ . Für den gleichen Winkel hat nun der geometrische Bruch in obiger Formel bei geringer Winkeldifferenz  $d\omega = \omega_2 - \omega_1$  ebenfalls den Wert  $1/3 \sin^4 \omega \cos \omega = 1,164$ ; eine dünne kegelförmige Spule, bei der  $\omega_1$  und  $\omega_2$  nur wenig von  $63^\circ 26'$  abweichen, hat also denselben Nutzeffekt  $A/(\partial \mathfrak{H}_3/\partial x) = 1,164 \sigma C_3$  wie die Idealspule. Ferner findet man z. B. für  $62^\circ < \omega < 65^\circ$  den Zahlenfaktor 1,166, für  $45^\circ < \omega < 80^\circ$  bereits 1,369, für  $40^\circ < \omega < 85^\circ$  schließlich 1,527; die Zahlen steigen daher in ungünstigem Sinne bei zunehmendem Winkelbereich des Trapezprofils. Was das Verhältnis  $A/(\partial \mathfrak{H}_3/\partial x)^2$  anbelangt, so liegt das Minimum des goniometrischen Bruchs für  $\omega_2 = 90^\circ$  bei  $\omega_1 = 35^\circ 58'$ , und es ergibt den Wert 1,0847  $\sigma j b^3$ .

Für *ungesättigte* Partikel war der Mindestwert von  $A/\nabla \mathfrak{H}_3^2 = 0,1813 \sigma j \varrho_1^2$ , nach § 82. In obiger Formel zeigt nun der hier aus der Integration nach  $y$  entstehende Bruch  $k(k-1)/(2k-3)$  wieder einen Minimalwert 1,8660 für  $k = 2,3660$ . Setzt man dies ein, so wird für  $w = \infty$ :

$$\nabla \mathfrak{H}_3^2 = \frac{4 \pi^2 C_3^2}{3 j^2 b^5} (\sin^3 \omega_2 - \sin^3 \omega_1) (\cos \omega_1 - \cos \omega_2),$$

$$\frac{A}{\nabla \mathfrak{H}_3^2} = \frac{1,8660}{4 \pi} \sigma j b^2 \frac{\cot \omega_1 - \cot \omega_2}{(\sin^3 \omega_2 - \sin^3 \omega_1) (\cos \omega_1 - \cos \omega_2)}.$$

Geht man von einem vorgegebenen Werte von  $\omega_2$  aus, so kann man den günstigsten Wert von  $\omega_1$  berechnen, für den der Bruch ein Minimum wird; z. B. für  $\omega_2 = 90^\circ$  wird  $\omega_1 = \arcsin \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = 39^\circ 3'$  und  $A/\nabla \mathfrak{H}_3^2 = 0,3148 \sigma j b^2$ . Für  $50^\circ < \omega < 85^\circ$  findet man  $A/\nabla \mathfrak{H}_3^2 = 0,3726 \sigma j b^2$ , also er-

heblich ungünstiger als die Idealspule. Übrigens läßt sich dieses Verhältnis auch leicht berechnen für die drei Hauptfälle (§ 53), für die  $k = 0$  bzw. 1 oder 2 war.

§ 87. Rechteckige Spulenprofile seien schließlich als die allereinfachsten auch bei Zugspulen betrachtet. Für einen Kreisleiter war nach Gleichung (59), (60) und (86), da  $\sin \omega = y/\sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\cos \omega = x/\sqrt{x^2 + y^2}$ :

$$d^2 \mathfrak{H}_3 = \frac{2\pi \mathfrak{C}}{j} \sin^3 \omega dx \frac{dy}{y} = \frac{2\pi \mathfrak{C}}{j} \frac{y^2 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial (d^2 \mathfrak{H}_3)}{\partial x} = \frac{6\pi \mathfrak{C}}{j} \sin^4 \omega \cos \omega dx \frac{dy}{y^2} = \frac{6\pi \mathfrak{C}}{j} \frac{xy^2 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\nabla (d^2 \mathfrak{H}_3)^2 = \frac{24\pi^2 \mathfrak{C}^2}{j^2} \frac{xy^4 (dx)^2 (dy)^2}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$d^2 A = \frac{2\pi \sigma \mathfrak{C}^2}{j} y dx dy.$$

$$\frac{d^2 A}{\partial (d^2 \mathfrak{H}_3)} = \frac{1}{3} \sigma \mathfrak{C} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{xy}.$$

Letzterer Ausdruck für den reziproken Nutzeffekt enthält  $x$  und  $y$  vertauschbar; dabei entspricht  $x = \text{const.}$  einer Flachspule,  $y = \text{const.}$  einem Solenoid. Damit der Nutzeffekt, wie in §§ 60, 79 überall der gleiche sei, muß demnach im allgemeinen die Stromdichte  $\mathfrak{C}$  proportional  $xy/\sigma \sqrt{x^2 + y^2}$  variieren; also bei konstantem  $\sigma$ , sofern  $x$  und  $y$  gleicher Größenordnung bleiben, ungefähr  $\mathfrak{C} = C_3/x^3$  bzw.  $= C_3/y^3$ ; falls jedoch  $x$  oder  $y$  erheblich überwiegt würde schließlich  $\mathfrak{C} = C_4 y/x^4$  bzw.  $= C_4 x/y^4$  sein müssen für  $y$  bzw.  $x$  konstant. Sollte  $\sigma$  verschiedene Werte aufweisen, etwa infolge Verwendung von Silber für die inneren, von Aluminium für die äußere Wicklung, so wäre dementsprechend die Stromdichte in leicht ersichtlicher Weise passend abzustufen.

§ 88. Zunächst möge für *gesättigte* Partikel bei einer Flachspule zylindrische Schichtung zu wählen sein, derart, daß wieder  $\mathfrak{C} = C_3/y^3$ ; setzt man dies ein, so ergibt die Integration nach  $y$  für den Punkt  $O$  unter Annahme eines Innenradius  $b$  und unbegrenzten Außenradius:

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (d \mathfrak{H}_3)}{\partial x} = \frac{6 \pi C_3}{j} x \, dx \int_b^{\infty} \frac{dy}{y \sqrt{x^2 + y^2}} \\ = \frac{6 \pi C_3}{j} \frac{1}{x^4} \left( \frac{-4x^3 - 3b^2 x}{3 \sqrt{x^2 + b^2}} - \log \frac{\sqrt{x^2 + b^2} - x}{b} \right) dx, \end{array} \right.$$

$$(96) \quad dA = \frac{2 \pi \sigma C_3^2}{j} dx \int_b^{\infty} \frac{dy}{y^5} = \frac{\pi \sigma C_3^2}{2j} \frac{1}{b^4} dx,$$

$$(97) \quad \frac{dA}{\partial x} = \frac{1}{12} \sigma C_3 \frac{\xi^4}{\frac{-4\xi^3 - 3\xi}{3 \sqrt{\xi^2 + 1}} - \log (\sqrt{\xi^2 + 1} - \xi)};$$

hier wurde der Kürze halber  $\xi = x/b$  gesetzt; diese Gleichungen gelten für eine Zugspule von geringer Breite  $dx$  (Fig. 21).

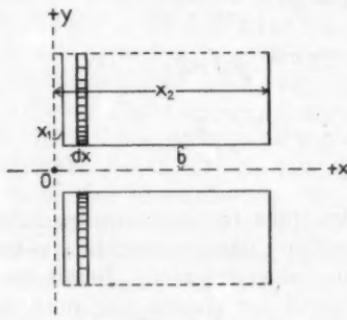


Fig. 21.

Der Außenradius ist zwar  $B = \infty$  angenommen; tatsächlich genügt ein geringer Wert angesichts der raschen Abnahme der Stromdichte. Differenzierung des Ausdrucks (97) ergibt ein Minimum, bestimmt durch die Forderung:

$$\frac{19\xi^5 + 28\xi^3 + 12\xi}{8\sqrt{\xi^2 + 1}} + 4 \log (\sqrt{\xi^2 + 1} - \xi) = 0;$$

es liegt bei  $\xi = 0,612$ . Eine innere Spulenzone liegt demnach in Gaugainscher Lage bezüglich des Punktes  $O$ ; es wird in diesem Falle  $A/(\partial \mathfrak{H}_3 / \partial x) = 1,209 \sigma C_3$ , also nicht allzu ungünstig.

Für eine breitere Spule zwischen den Abszissen  $x_1$  und  $x_2$  liefert die Integration von (95) und (96) nach  $x$  des weiteren:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial x} = \frac{2 \pi C_3}{j} \left| \frac{1}{x^3} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} + \log \frac{\sqrt{x^2 + b^2} - x}{b} \right) \right|_{x_1}^{x_2};$$

$$A = \frac{\pi \sigma C_3^2}{2j} \frac{1}{b^4} (x_2 - x_1)$$

beispielsweise wird zwischen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = b$ , nach wie vor bei zylindrischer Schichtung:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial x} = 0,3181 \frac{\pi C_3}{j} \frac{1}{b^3}, \quad A = \frac{\pi \sigma C_3^2}{2j} \frac{1}{b^4}, \quad \frac{A}{\frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial x}} = 1,572 \sigma C_3.$$

Für ein Solenoid mit ebener Schichtung der Stromdichte nach  $C_3/x^3$  bzw.  $C_4/x^4$  lässt sich die Rechnung in ähnlicher Weise durchführen.

§ 89. Für *ungesättigte* Partikel sei der Schichtungs-exponent  $k = 2$  gesetzt, also  $\mathfrak{C} = C_2/y^2$ , da der Wert 2,3660 offenbar zu Komplikationen führt; man erhält zunächst wieder für eine schmale Spule (Fig. 21) mit zylindrischer Schichtung:

$$d\tilde{\Phi}_3 = \frac{2 \pi C_3}{j} dx \int_b^\infty \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2 \pi C_3}{j} \frac{1}{x^2} \left( 1 - \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right) dx,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (d\tilde{\Phi}_3)}{\partial x} &= \frac{6 \pi C_3}{j} x dx \int_b^\infty \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{2 \pi C_3}{j} \left\{ \frac{2}{x^3} - \left( \frac{2b^3}{x^3} + \frac{3b}{x} \right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right\} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla d\tilde{\Phi}_3^2 &= \frac{8 \pi^2 C_3^2}{j^2} \frac{(dx)^2}{x^2} \left( 1 - \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right) \\ &\quad \left\{ \frac{2}{x^5} - \left( 2 \frac{b^3}{x^5} + 3 \frac{b}{x^3} \right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right\}, \end{aligned}$$

$$dA = \frac{2 \pi \sigma C_3^2}{j} dx \int_b^\infty \frac{dy}{y^3} = \frac{\pi \sigma C_3^2}{j} \frac{1}{b^2} dx,$$

$$(98) \frac{dA}{\nabla d\tilde{\Phi}_3^2} = \frac{1}{8\pi} \sigma j b^3 \frac{1}{\left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \right) \left\{ \frac{2}{\xi^5} - \left( \frac{2}{\xi^5} + \frac{3}{\xi} \right) \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \right\}} d\xi.$$

Für eine breitere ( $x_1 < x < x_2$ ) Zugspule liefert Integration nach  $x$ :

$$\tilde{\mathfrak{H}}_3 = \frac{2 \pi C_2}{j} \left| \frac{\sqrt{x^2 + b^2} - b}{b x} \right|_{x_1}^{x_2},$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_3}{\partial x} = \frac{2 \pi C_2}{j} \left| \frac{b - \sqrt{x^2 + b^2}}{x^2 \sqrt{x^2 + b^2}} \right|_{x_1}^{x_2},$$

$$A = \frac{\pi \sigma C_2^2}{j} \frac{1}{b^2} (x_2 - x_1).$$

Dies ergibt z. B. zwischen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = b$ :

$$\tilde{\mathfrak{H}}_3 = \frac{2 \pi C_2}{j} \frac{1}{b} (\sqrt{2} - 1), \quad \nabla \tilde{\mathfrak{H}}_3^2 = \frac{4 \pi C_2^2}{j^3} \frac{1}{b^3} (3 - 2\sqrt{2}),$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_3}{\partial x} = \frac{\pi C_2}{j} \frac{1}{b^2} (\sqrt{2} - 1), \quad A = \frac{\pi \sigma C_2^2}{j} \frac{1}{b}.$$

$$\frac{A}{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_3} = \sigma C_2 b (\sqrt{2} + 1), \quad \frac{A}{\nabla \tilde{\mathfrak{H}}_3^2} = \sigma j b^2 \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

Und schließlich für eine halbunendliche Zugspule:

$$\tilde{\mathfrak{H}}_3 = \frac{2 \pi C_2}{j} \frac{1}{b}, \quad \nabla \tilde{\mathfrak{H}}_3^2 = \frac{4 \pi^2 C_2^2}{j^3} \frac{1}{b^3},$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{H}}_3}{\partial x} = \frac{\pi C_2}{j} \frac{1}{b^2}, \quad A = \infty.$$

Dieser Grenzfall ist nur insofern von Interesse, als er das überhaupt denkbare Maximum der Zugkraft bei gegebener zylindrischer Schichtung darstellt, freilich einer unendlichen Leistung entsprechend. Auch hier läßt sich ein Solenoid mit vorgeschriebener ebener Schichtung leicht berechnen.

Bei einer Anzahl Berechnungen und Kurvenzeichnungen hat mich mein Assistent Hr. Dr. Cl. v. Horvath in dankenswerter Weise unterstützt.

## VIII. Zusammenfassung.

(Für die drei Mitteilungen.)

## I. Rundarmaturen.

Allgemeine Integralausdrücke (§ 4) werden angegeben für das Feld  $\mathfrak{H}(x)$ , seine erste und zweite Derivierten in Achsenpunkten.

Zweischaliges Rotationshyperboloid (§ 5).  $\mathfrak{H}(x)$  ist für jeden Achsenpunkt integrierbar. Für das Zentrum  $x = 0$  wird  $\mathfrak{H}(0)$  angegeben. Der Übergang zur asymptotischen Doppelkegelfläche ergibt für

Kegelstützpole (§ 6) bekannte Formeln für das Teilfeld  $\mathfrak{H}_1$  (vorstehende Stirnflächen) und  $\mathfrak{H}_2$  (Kegelflächen) im Symmetriezentrum.

Gleichförmigkeitsgrad (§§ 7, 8). Die zweiten Derivierten von  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$  werden hergeleitet; deren Summe schwindet für einen vorgegebenen Kegelhalbwinkel  $\alpha$  bei richtiger Wahl des zugeordneten Stirnhalbwinkels  $\beta$ , so daß das Gesamtfeld dann im Zentrum gleichförmig wird.

Beliebige Feldpunkte (§§ 9, 10). Für ebene Stirnflächen und Kegelarmaturen ist das Feld im allgemeinen durch elliptische Integrale der drei Gattungen darstellbar.

Aquatoreale Feldpunkte (§ 11). Die Gleichungen folgen aus den vorigen und sind nicht elementarer Art.

Ebene, konische, hyperboloidische, sphärische, ellipsoidische und paraboloidische Zonen (§§ 12—21). Für jeden Punkt der Symmetrieachse läßt sich das Feld sowie seine Derivierten durch geschlossene — wenn auch komplizierte — Ausdrücke darstellen bzw. auch in eine Reihe entwickeln. Dies gilt daher auch für zonenweise aus derartigen zentrierten Elementen zusammengesetzte Rundarmaturen.

Attraktorische Einzelarmaturen (§§ 22—24). Vgl. Abschnitt VI.

## II. Zylinder- und Prismenarmaturen.

Allgemeine Integralausdrücke (§ 25) für  $\mathfrak{H}(x)$  und seine Derivierten.

Zweischaliger hyperbolischer Zylinder (§ 26). Für das Zentrum  $x = 0$  wird  $\mathfrak{H}(0)$  angegeben. Der Übergang zum asymptotischen Ebenenpaar ergibt für

Prismenarmaturen (§§ 27, 28) Formeln für  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$ .

Gleichförmigkeitsgrad (§§ 29, 30). Auch hier läßt sich ein gleichförmiges Gesamtfeld durch geeignete Anordnung vorstehender Stirnflächen darstellen.

Beliebige Feldpunkte (§ 31). Die Berechnung der Felder genügend langer prismatischer Armaturen führt zu integrierbaren Ausdrücken, wofern nur ebene Fazetten in Frage kommen.

Aquatoreale Feldpunkte (§ 32). Das Feld ist durch eine elementare Gleichung bestimmt. Auch für alle Punkte der Querachse gilt eine elementare — freilich komplizierte — Formel; diese spielt eine Rolle bei den Querintegralen, welche insbesondere die transversale magnetische Doppelbrechung bestimmen.

*Normale und schräge Prismenflächen, kreisförmige und parabolische Zylinder* (§§ 33—37). Für jeden Achsenpunkt lässt sich das Feld sowie seine Derivierten durch elementare geschlossene Ausdrücke darstellen. Dies gilt auch für aus solchen Elementen aufgebauten Armaturen.

*Attraktorische Einzelarmaturen* (§§ 38, 39). Vgl. Abschnitt VI.

### III. Ungleichförmig magnetisierte Armaturen.

*Komplex lamellare Magnetisierung* (§§ 40—43). Der im I. und II. Abschnitt als erste Annäherung angenommene Idealzustand gleichförmiger Magnetisierung wird nicht erreicht; weder rot  $\mathfrak{J}$  noch div  $\mathfrak{J}$  schwinden. Bei zugespitzten Armaturen konvergieren die Induktionslinien gegen das Interferrum, im Gegensatz zur Divergenz an Stirnflächen.

*Abgestutzte Kegel und Prismen* (§§ 44—47). In zweiter Annäherung werden unter Annahme eines geradlinigen — nicht parallelen — Verlaufs der Induktionslinien Zahlenbeispiele berechnet; die Übereinstimmung mit tatsächlich gemessenen Feldwerten macht das Postulat einer „Übersättigung“ mit inneren Quellen und Senken sehr wahrscheinlich. Schließlich wird die Wirkung eines hochgesättigten Kernes in einer Kegelarmatur berechnet.

### IV. Interpolarspulen.

*Maximalfeld* (§§ 52—55). Der günstigste Halbwinkel  $\alpha$  ist kleiner als  $54^\circ 44'$ ; er nähert sich letzterem Grenzwert mit zunehmendem ferromagnetischen Faktor. Die Form wird für drei einfache Hauptfälle berechnet, sowohl für runde wie für prismatische Armaturen.

*Wirkungsgrad* (§§ 56, 57). Es werden Anordnungen diskutiert, für die  $\mathfrak{H}^2/A$  möglichst hohe Werte erreicht.

*Gleichförmigkeitsgrad* (§§ 58, 59). Die Uniformität des Feldes lässt sich in verschiedener Weise herbeiführen, wofür Formeln entwickelt werden.

### V. Eisenlose Feldspulen.

*Multiplikatrixkurven* (§§ 60, 61, Fig. 13). Die teilweise bekannten Eigenschaften solcher Meridiankurven werden zusammengestellt.

*Gleichmäßig geschichtete Wicklung* (§ 62). Feld, Leistung und Wirkungsgrad werden mittels zweierlei Integrationsverfahren berechnet; im günstigsten Falle ist  $A/\mathfrak{H}_s^2 = 0,1194 \sigma j \varrho_1$ .

*Zylindrische Schichtung* (§§ 63, 64) bei trapezoidalen Spulen ist technisch am leichtesten herzustellen; es werden Formeln für die drei Hauptfälle hergeleitet; im dritten günstigsten Falle ( $C = C_s/y^2$ ) wird  $A/\mathfrak{H}_s^2 = 0,1592 \sigma j b$  (für  $\alpha = 45^\circ$ ,  $w = \infty$ ).

*Gleichförmigkeitsgrad* (§ 65). Dieser ist bei trapezoidalen Spulen nicht ganz befriedigend; dagegen vollkommen bei völlig bewickelten:

*Ellipsoidspulen* (§§ 66, 67), für welche Feld, Leistung und Wirkungsgrad berechnet werden.

*Kugelospulen* (§ 68); hierfür ist  $A/\mathfrak{H}_s^2 = 0,1406 \sigma j \tau^2/dy$  (für  $w = \infty$ ).

## VI. Zugarmaturen.

*Attraktorische Rundarmaturen* (§§ 22—24, 69—72). Die Zugkraft einer Elementarzone sowie eines Kegelsektors auf ein in der Kegelachse bewegliches gesättigtes bzw. ungesättigtes Partikel wird berechnet.

*Polspulen* (§ 73) zur Verstärkung der Zugkraft werden diskutiert.

*Attraktorische Prismenarmaturen* (§§ 38, 39, 74). Die Optimalwerte der Halbwinkel für die positiven Maxima der Anziehung sind nachstehend mit denen für Rundarmaturen zusammengestellt.

Partikel	Schmaler Kegel-sektor	Halbe Kegel-zone	Volle Kegel-zone	Schmales Halb-prisma	Langes Halb-prisma	Langes Voll-prisma
Gesättigt	60°	49° 37'	39° 14'	60°	54° 44'	30°
Ungesättigt	65° 54'	54° 52'	42° 11'	65° 54'	60°	32° 8'

## VII. Eisenlose Zugspulen.

*Glomeratrixkurven* (§§ 75—77). Die allgemeinen Eigenschaften solcher Meridiankurven werden mitgeteilt. Insbesondere ergeben sich in verschiedenen Fällen als Optimalprofile ein

*Symmetrisches Quadrifolium* (§§ 78—81, Fig. 18) für gesättigte Partikel, wobei man für die Schichtung  $\mathfrak{C} = P_3/p^3$  findet:

$$A/(\partial \mathfrak{C}/\partial x) = 0,3333 \sigma P_3 = 1,164 \sigma C_3 \text{ (wenn } \varrho_2 = \infty\text{).}$$

*Asymmetrisches Bifolium* (§§ 82—84, Fig. 19) für ungesättigte Partikel, wobei für die günstigste Schichtung  $A/\nabla \mathfrak{C}_3^2 = 0,1813 \sigma j \varrho_1^2$  (wenn  $\varrho_2 = \infty$ ).

*Trapezoidale Spulenprofile* (§§ 85, 86, Fig. 20) mit zylindrisch geschichteter Stromdichte werden bezüglich Leistung und Zugkraft berechnet.

*Rechteckige Spulenprofile* (§§ 87—89, Fig. 21), insbesondere Flachspulen oder Solenoide mit vorgeschriebener zylindrischer bzw. ebener Schichtung werden diskutiert.

(Eingegangen 28. September 1916.)

2. *Untersuchungen über die spezifische Wärme  
bei tiefen Temperaturen;*  
*von Paul Günther.*

(*Berliner Dissertation.*)

Von W. Nernst<sup>1)</sup> ist der Weg zur Messung spezifischer Wärmen bei sehr tiefen Temperaturen angegeben und ausführlich beschrieben worden. Damals wurde das Platin-thermometer benutzt, das zugleich als Heizdraht diente. Neuerdings ist von W. Nernst und F. Schwers<sup>2)</sup> eine Methode zur Messung spezifischer Wärmen bei sehr tiefen Temperaturen angegeben worden, die auf der Benutzung von Thermoelementen beruht. Es galt nun, diese Messungsmethode noch nach Möglichkeit zu verbessern und dann neue Messungsergebnisse zu gewinnen.

1. *Kurze Beschreibung der ursprünglichen Methode.*

Das Wesentliche der von W. Nernst und F. Schwers entwickelten Messungsmethode besteht darin, daß die jeweiligen Temperaturen eines in einem praktisch vollkommenen Vakuums schwebenden Kupferkalorimeters in zwei Stufen gemessen werden. Zunächst mißt ein Thermoelement Kupfer-Konstantan die Temperaturdifferenz des Kalorimeters gegen einen in seiner Nähe befindlichen, aber thermisch von ihm isolierten und ebenfalls auf tiefe Temperatur abgekühlten Bleiblock. Diese Temperaturdifferenz beträgt nie mehr als einige Grade und läßt sich auf  $0,01^\circ$  genau bestimmen. Die absolute Temperatur dieses Bleiblockes nun wird durch ein Bleiwiderstandsthermometer gemessen, und zwar ist der Bleiblock so groß gewählt, daß seine Temperatur für mehrere Minuten — d. h. für die Dauer eines Versuches — konstant bleibt. Die Messung der absoluten Temperatur ist ebenfalls

1) W. Nernst, Energieinhalt fester Stoffe. Ann. d. Phys. 36. p. 395. 1911.

2) W. Nernst u. F. Schwers, Sitzungsber. d. preuß. Akad., p. 355. 1914. Vgl. ferner ebenda p. 262. 1910; p. 306. 1911.

von höchster Genauigkeit, wenn man den jeweiligen Widerstand des Bleidrahtes nach der Potentialmethode mißt, wobei die Schwankungen im Widerstand der Zuleitungsdrähte eliminiert werden. Tatsächlich genügt es für die vorliegenden Untersuchungen, die absolute Temperatur auf  $0,1^\circ$  genau zu kennen.

Die praktische Konstruktion des Kalorimeterapparates ist aus Fig. 1 ersichtlich. Das zylindrische, aus Kupferblech gefertigte Kalorimetergefäß steht auf einem dünnen Ebonit-

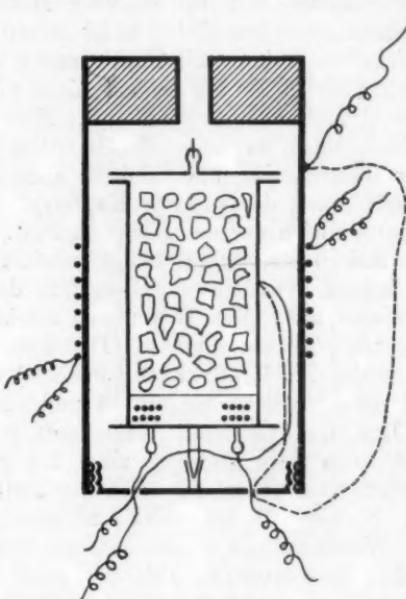


Fig. 1.

fuß. In seinem Innern liegt kurz über dem Boden die Heizspirale, die aus einem Konstantandraht von etwa  $100 \Omega$  Widerstand besteht. Sie ist durch ein Blättchen von dünnem, nicht lackiertem Seidenpapier nach oben hin geschützt. Die Einführung des Heizstromes erfolgt durch dünne Platindrähte, die, isoliert in dünnen Platinröhren verlaufend, durch den Boden des Kalorimetergefäßes hindurchtreten und außen mit den zur Batterie führenden Kupferdrähten verlötet sind. Der luftdichte Abschluß an den Einführungsstellen ist durch einen Tropfen Schmelzglas bewirkt. Der Deckel des Kalorimeters

wird nach dem Einbringen der zu untersuchenden Substanz aufgelötet. Ein kleines, durch einen Stift verschließbares Röhrchen in der Mitte des Deckels gestattet es, den Hohlraum im Kalorimeter mit Wasserstoff zu füllen.

Das ganze Kalorimetergefäß steht im Innern eines starkwandigen Kupferzyinders, der unten durch einen ausschraubbaren Boden und oben durch einen zylindrischen, in der Mitte durchbohrten Bleiklotz verschlossen ist. Außen an dem Kupferzyinder befindet sich in mittlerer Höhe das Blei-widerstandsthermometer. Der Bleidraht ist isoliert auf dünnes Papier aufgewickelt und dann mit Papier und schließlich mit Stanniol überklebt. Das Thermoelement Kupfer-Konstantan, das die Temperaturdifferenz zwischen dem Kalorimetergefäß und dem Bleiblock mißt, hat seine eine Lötstelle in der mittleren Höhe des Kalorimetergefäßes und die andere am oberen Teil der Außenwandung des äußeren Kupferzyinders, dessen Temperatur immer gleich der des Bleiblockes ist.

Der ganze Kalorimeterapparat hängt an einem Bindfaden frei in einem langen zylindrischen Glasgefäß, das sich vollkommen evakuieren läßt. Das Evakuieren erfolgt mit Hilfe einer Gaedeschen Molekularpumpe. Die letzten Gasreste werden durch poröse Kohle (Buxbaumkohleholz) entfernt, die unter vermindertem Druck ausgeglüht ist und nun sukzessive mit flüssiger Luft und flüssigem Wasserstoff gekühlt wird.

Zur Ausführung einer Messung wird das große, zylindrische Glasgefäß von außen mit flüssiger Luft und dann mit flüssigem Wasserstoff abgekühlt, während im Innern noch so viel Wasserstoffgas vorhanden ist, daß der freischwebende Kalorimeterapparat sich genügend schnell mit abkühlt. Ist nach dem Abpumpen des flüssigen Wasserstoffs die tiefste Temperatur erreicht, was durch Messen mit dem Bleidrahtwiderstandsthermometer festgestellt wird, so stellt man das vollkommene Vakuum her und bestimmt den Gang der Temperatur des Kalorimeters, der als Gang der elektromotorischen Kraft des Thermoelementes erscheint. Man heizt dann nach erneuter Messung der absoluten Temperatur des Bleiblockes mit einer genau gemessenen Energiemenge und bestimmt mit Hilfe der Thermokraft die Temperaturerhöhung des Kalorimeters. Damit ist der Wasserwert des gefüllten Kalorimeters bei einer genau bekannten tiefen Temperatur festgestellt.

2. Versuche zur Verbesserung der Methode.

Ein Versuch, die obige, bereits von Nernst und Schwers beschriebene Methode zu vervollkommen, hatte an folgenden Punkten einzusetzen. Die Wärmekapazität des leeren Kupferkalorimeters bei tiefen Temperaturen ist so bedeutend, daß sie oft 90 Proz. und mehr des gesamten gemessenen Wasserwertes des gefüllten Kalorimeters ausmacht, wobei dann der

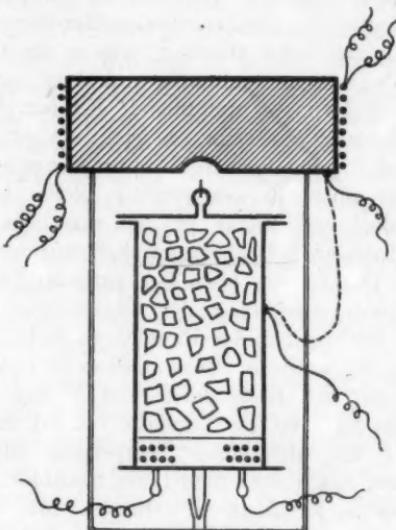


Fig. 2.

Inhalt des Kalorimeters bei Substanzen mit hohem Molekulargewicht noch manchmal nur 0,1 Mol. beträgt. Hier wäre durch eine Vergrößerung des Kalorimetergefäßes Abhilfe zu schaffen.

Eine solche wurde nun in der folgenden Anordnung versucht. Der dicke Kupferzylinder, welcher das Kalorimetergefäß einhüllte, wurde fortgelassen und damit Raum zur Vergrößerung des Kalorimetergefäßes gewonnen. Im einzelnen geschah dies in folgender Weise (vgl. Fig. 2).

Der schwere Bleiblock, um den das Bleiwiderstandsthermometer unmittelbar gewickelt war, trug einen Bügel aus Hartgummi, in welchem das Kalorimetergefäß mit seinem

Ebonitfuß unten befestigt wurde. Die eine Lötstelle des Thermoelementes Kupfer-Konstantan befand sich wie früher in mittlerer Höhe an der Außenwand des Kalorimeters; die andere Lötstelle war an der Unterseite des schweren Bleiblocks angebracht. Es wurde einstweilen zur Erprobung dieser neuen Anordnung das alte Kalorimetergefäß von W. Nernst und F. Schwers noch beibehalten.

Die Versuche ergaben nun das merkwürdige Resultat, daß hier bei Wegfall des Kupferzylinders der Gang der Thermokraft vor und nach jeder Heizung, wie er am Galvanometer abgelesen wurde, sehr unregelmäßig und meist recht groß war. Der das ganze Kalorimeter umhüllende Kupferzylinder scheint also ganz notwendig zu sein, obgleich ein plausibler theoretischer Grund hierfür zurzeit noch nicht angegeben werden kann. Es war oberhalb des großen Bleiblockes noch ein kleinerer Bleiblock angebracht, um den sämtliche zum Kalorimeterapparat führenden Drähte gewickelt waren. Dieser sollte die durch die Drähte von oben her zufließende Wärme aufstauen und somit den Gang der Thermokraft vermindern. Daß auch das Einfügen dieses Bleiblockes nicht die erwartete Wirkung hatte, lag wohl nur daran, daß er zu hoch angebracht war und sich dadurch leicht über dem Niveau des flüssigen Wasserstoffs im äußeren Dewargefäß befand und sich dann gar nicht auf die allertiefste Temperatur abkühlte. Hr. A. Eucken hat mit einem derartigen Staublock im hiesigen Institut die besten Erfahrungen gemacht. Mit dieser so hergerichteten Apparatur wurden die spezifischen Wärmen von Eisen gemessen, die später angegeben sind. Die Zuverlässigkeit dieser Messung ist der der späteren Messungen nicht ganz gleich, wenn auch die Möglichkeit, die gefundenen Werte durch eine Debyesche Funktion auszudrücken, für die hinlängliche Genauigkeit auch dieser Messungsreihe spricht. Nach dem Fehlschlage dieses ganzen Verbesserungsversuches wurde der alte von W. Nernst und F. Schwers benutzte Kalorimeterapparat wieder eingesetzt. Natürlich ist das von W. Nernst geeichte Thermoelement Kupfer-Konstantan (l. c. p. 360) immer verwendet worden.

Ein einfaches Mittel, die Genauigkeit der Messungen zu erhöhen, wäre es, große Temperaturerhöhungen des Kalorimeters und damit große Ausschläge am Spiegelgalvanometer

durch Zuführung großer Energiemengen bei der Heizung hervorzurufen. Nun entspricht aber ein Ausschlag von 15 Skalateilen am Galvanometer bei ganz tiefen Temperaturen schon einer Temperaturerhöhung von  $2^{\circ}$ , und befindet man sich, wie gewöhnlich, hier in einem Gebiete des starken Anstieges der spezifischen Wärmen, so läuft man Gefahr, bei einer sehr nennenswerten Vergrößerung des Ausschlages, wie sie schon nötig wäre, um eine unsichere, von der Temperatur wenig abhängige Gangkorrektur prozentisch herabzudrücken, schon mittlere spezifische Wärmen über ein kleines Temperaturintervall zu messen. Nur bei den Temperaturen der flüssigen Luft sind Galvanometerausschläge von etwa 50—60 Skalateilen gelegentlich gebraucht worden, was hier nur einer Temperaturerhöhung von  $2-3^{\circ}$  entspricht. Es galt also, die Gänge der Thermokraft als solche zu verkleinern und vor allen Dingen dafür zu sorgen, daß sie möglichst regelmäßig waren. Dies wurde durch Einführung besonders dünner, emailierter Zuleitungsdrähte auf langen Strecken innerhalb des Apparates erstrebzt; nur die beiden Heizdrähte mußten natürlich unverändert bleiben.

Für die Geschwindigkeit, mit der nach einer Heizung die Thermokraft sich wieder auf regelmäßigen Gang einstellt, ist die äußere Beschaffenheit des im Kalorimeter befindlichen Materials in hohem Grade maßgebend. Bei der Messung feinpulvriger Substanzen tritt oft schon nach einer Minute vollkommener Temperaturausgleich ein. Befinden sich feste, selbst metallische Stücke im Kalorimeter, so sind zum Temperaturausgleich trotz der hier sicherlich meist vorzüglichen Wärmeleitfähigkeit des Materials und trotz der Wasserstofffüllung in den Hohlräumen manchmal 4 Minuten zum Ausgleich der Temperatur erforderlich. Was die Messung der absoluten Temperatur anbelangt, so wurde beobachtet, daß bei dem hier benutzten Bleidraht, der nicht mehr der von W. Nernst und F. Schwers gebrauchte war, eine stärkere Temperaturabhängigkeit des  $\alpha$ -Wertes vorhanden war. Zu seiner Bestimmung wurde das Bleithermometer direkt in flüssigen Wasserstoff, der unter bekanntem Barometerstand siedet, sowie in stark abgepumpte flüssige Luft und in flüssigen Sauerstoff eingetaucht. Die Temperatur der beiden letzteren Bäder wurde mit Hilfe eines von Hrn.

v. Siemens<sup>1)</sup> geeichten Stockschen Thermometers bestimmt. Hierbei ergab sich folgende Tabelle für den  $\alpha$ -Wert:

$T$	$\alpha$	$T$	$\alpha$
15,0	0,00619	65,0	0,01044
25,0	703	75,0	129
35,0	788	85,0	229
45,0	873	95,0	329
55,0	967		

Der  $\alpha$ -Wert ist, wie man sieht, bei der Temperatur des flüssigen Sauerstoffs ungefähr doppelt so groß als beim siedenden Wasserstoff. Daß die Tabelle nur auf Grund der Bestimmung von 8 Punkten in linearer Interpolation, wie sich aus der Lage der Punkte ergab, für das ganze Temperaturgebiet aufgestellt wurde, ist wohl hier einwandsfrei, da eine Bestimmung der absoluten Temperatur auf  $0,1^{\circ}$  genau vollkommen hinlänglich ist. Das Verhältnis  $W/W_0$  blieb, soweit es beobachtet wurde, vollkommen konstant, wenn auch der  $W_0$ -Wert langsam wuchs, was durch häufige Eichungen genau verfolgt wurde.

Nun galt es vor allem noch die Dauerhaftigkeit der ganzen Apparatur zu vergrößern. Es war nämlich durch die Molekularpumpe, die mit dem großen Vorteil des schnellen Pumpens den Nachteil vereint, durch die hohe Umdrehungszahl ihres Elektromotors starke Erschütterungen hervorzurufen, der ganze Apparat dauernd gefährdet. Sprünge im Glas und Bruchstellen in den Drähten waren häufig Erscheinungen. Diesem Übelstande wurde dadurch vollkommen abgeholfen, daß in der aus Fig. 3 ersichtlichen Weise eine dreimal gewundene Glasspirale zwischen dem großen über der Pumpe befindlichen Glashahn und der Ansatzstelle des mit Kokosnußkohle gefüllten Rohres eingesetzt wurde. Zur Sicherung des Vakuums waren schon vorher einige kleine Änderungen angebracht worden. Das mit Kokosnußkohle gefüllte Rohr aus schwerschmelzbarem Glase, das früher nur mit weißem Siegel-lack an ein Ansatzrohr aus gewöhnlichem Glase gekittet war, wurde jetzt in einen mit Quecksilber gedichteten Schliff, dessen äußere Wand aus dem gewöhnlichen Glase bestand, eingesetzt. Vor dem Schliff befand sich noch ein Glashahn, der es ermöglichte, die Kohle vor der Einwirkung der Luft unter

1) Ann. d. Phys. 42, p. 871. 1913.

Atmosphärendruck auch dann zu schützen, wenn der ganze Apparat geöffnet war. Diese Maßregel erwies sich zur Steigerung der Absorptionskraft der jedesmal etwa 10 Minuten lang auf dunkle Rotglut ausgeglühten Kohle als sehr zweckmäßig. Es ist bekanntlich nötig, die Absorptionskraft der

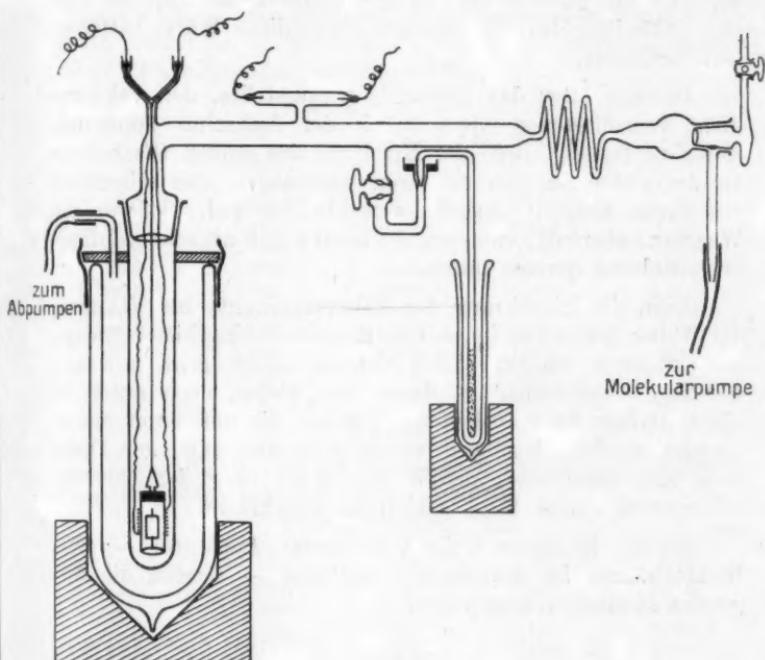


Fig. 3.

Kohle aufs höchste zu steigern, weil die Wirkungsfähigkeit der Molekularpumpe, sowohl was die Geschwindigkeit des Pumpens als auch die Höhe des zu erreichen Vakuums betraf, durch die Einfügung der dünnen Glasspirale stark herabgesetzt war.<sup>1)</sup> Aber nunmehr war es möglich geworden,

1) Schon vor der Einfügung der Spirale war es ohne Kühlung der Kohle mit flüssigem Wasserstoff niemals gelungen, ein ausreichendes Vakuum zu erzeugen.

den Wasserstoffdruck im Innern des Apparates von Anfang an vor der Vorkühlung mit flüssiger Luft so zu bemessen, daß diese Wasserstoffmenge nach der vollständigen Abkühlung des Kalorimeters von der mit Luft und Wasserstoff bei geschlossenem Hahn gründlich vorgekühlten Kohle in einer Zeit von höchstens 5 Minuten vollständig fortgenommen wurde, während andererseits der Wasserstoffdruck im Apparat eine zur Abkühlung des Kalorimeters hinlängliche Wärmeleitfähigkeit verbürgte.

Da sich öfter das Bedürfnis herausstellte, den vakuumdicht verschlossenen Apparat mit der Außenluft kommunizieren zu lassen, wurde der Handgriff des großen Glashahnes an der einen Seite in ein Rohr ausgezogen, das seinerseits mit einem kleinen Glashahn verschließbar war. So war ein Weg zur Außenluft gewonnen, der nicht durch die sehr empfindliche Molekularpumpe führte.

Auch die Einführung der Zuleitungsrähte ins Vakuum, die früher insgesamt in weißen Siegellack eingekittet waren, ist verbessert worden; jeder einzelne Draht geht, wie aus der Fig. 3 ersichtlich ist, durch eine kleine, nach unten in einen dünnen Stiel auslaufende Pfanne, die unten mit einem Tropfen weißen Siegellacks verschlossen und dann zur Dichtung mit Quecksilber gefüllt ist. Auch über dem Quecksilber wurden noch Siegellackkappen angebracht.

Mit der in dieser Weise verbesserten Apparatur — alles Nichterwähnte ist unverändert geblieben — wurden die folgenden Messungen ausgeführt.

### 3. Ergebnisse der Messungen.

Die von W. Nernst und F. Schwers gegebenen Zahlen für den Wasserwert des leeren Kalorimeters wurden in einigen Stichproben wiedergefunden, so daß die von W. Nernst und F. Schwers gegebene Tabelle bei der Berechnung aller folgenden Messungen zugrunde gelegt ist. Die Werte bei ganz tiefen Temperaturen zu kontrollieren, fand sich oft genug Gelegenheit, da viele der untersuchten Substanzen unterhalb von  $30^{\circ}$  abs. überhaupt keine meßbare spezifische Wärme mehr besaßen.

Einige Zahlenbeispiele<sup>1)</sup> seien angeführt:

<i>T</i>	<i>WC</i>	<i>WC<sup>2</sup></i>	<i>T</i>	<i>WC</i>	<i>WC</i>
27,2	0,083	0,087	81,0	0,571	0,570
33,8	0,137	0,142	84,8	0,588	0,589
39,1	0,176	0,191	86,7	0,605	0,598
64,7	0,437	0,437	92,6	0,626	0,621

Eisen.

Dies sind die einzigen mit dem freistehenden Kalorimetergefäß ausgeführten Messungen. Verwendet wurde Fischersches Elektrolyteisen, in kleinen Stücken.

$$27,50 \text{ g} = 0,4919 \text{ Mol.}$$

<i>T</i>	<i>E</i>	<i>WC</i>	<i>WC<sub>k</sub></i>	<i>AW</i>
32,0	0,2026	0,203	0,075	0,152
33,1	0,4874	0,225	0,087	0,177
35,2	0,4992	0,275	0,120	0,244
38,1	0,4450	0,324	0,142	0,288
42,0	0,7969	0,377	0,160	0,325
46,9	1,1841	0,519	0,257	0,522
66,8	1,184	1,052	0,594	1,208
68,9	2,557	1,205	0,728	1,480
85,3	2,586	1,545	0,954	1,939
87,1	2,586	1,606	1,008	2,040
88,9	2,586	1,700	1,093	2,222
94,6	2,586	1,785	1,157	2,356

[Calcium.

Von Hrn. K. Moers zu anderen Zwecken dargestelltes Präparat, möglicherweise nicht ganz rein.

$$7,164 \text{ g} = 0,1787 \text{ Mol.}$$

<i>T</i>	<i>E</i>	<i>WC</i>	<i>WC<sub>k</sub></i>	<i>AW</i>
22,3	0,4091	0,144	0,091	0,509
24,0	0,4266	0,176	0,112	0,627
25,9	0,4382	0,210	0,132	0,744
29,2	1,211	0,260	0,159	0,890
32,6	1,203	0,333	0,200	1,120
35,8	1,211	0,414	0,253	1,416
38,8	1,211	0,468	0,280	1,567
46,3	1,404	0,636	0,381	2,132
49,3	1,290	0,686	0,401	2,244
52,0	1,438	0,773	0,462	2,586
56,5	1,552	0,858	0,503	2,815
59,7	1,687	0,934	0,547	3,062
62,0	1,691	0,982	0,572	3,202

1) In den folgenden Tabellen bedeutet *WC* den Wasserwert des gefüllten Kalorimeters, *WC<sub>k</sub>* den Wasserwert des Kalorimeterinhaltes allein, und *AW* bzw. *MW* die Atom- bzw. Molekularwärme der eingebrachten Substanz.

2) W. Nernst u. F. Schwers.

## Calciumhydrid.

Von Hrn. K. Moers zu anderen Zwecken dargestelltes Präparat.

8,202 g = 0,195 Mol.

T	E	WC	WC <sub>k</sub>	MW
69,9	1,408	0,835	0,349	1,79
71,2	1,502	0,859	0,362	1,86
72,5	1,506	0,879	0,371	1,90
79,0	1,506	0,994	0,438	2,25
80,1	1,502	1,024	0,461	2,37
80,9	1,499	1,029	0,462	2,37
86,2	1,502	1,129	0,534	2,74

## Zinkblende.

Schöne reguläre Kristalle wurden gepulvert und bei 50° getrocknet.

33,905 g = 0,842 Mol.

T	E	WC	WC <sub>k</sub>	MW
21,6	0,360	0,301	0,252	0,737
25,0	0,480	0,446	0,374	1,134
28,0	1,509	0,605	0,515	1,506
30,6	1,479	0,708	0,591	1,729
32,7	1,560	0,824	0,689	2,016
34,9	1,560	0,938	0,785	2,296
36,8	1,598	1,000	0,830	2,428
38,7	1,602	1,112	0,925	2,705
44,2	3,358	1,265	1,028	3,007
48,0	3,575	1,332	1,059	3,098
51,1	3,591	1,527	1,225	3,584
53,9	3,317	1,574	1,244	3,639
56,9	3,333	1,641	1,282	3,751
58,6	3,209	1,744	1,368	4,002

## Jod.

Resublimiertes Jod von Kahlbaum. Die Messung bereitete hier zunächst einige Schwierigkeiten, weil das elementare Jod das Kupfer des Kalorimeters angriff. Es gelang schließlich, Jod in geschlossenem Glasrohr zu schmelzen und in einen Klumpen von der ungefähren Form des Kalorimeters zu gießen. Dieser Klumpen wurde in Platinfolie eingehüllt, die mit Schellack zugeklebt wurde. Die Wärmekapazität des Platin, dessen Gewicht nur 0,788 g betrug, wurde bei der Berechnung als kleine Korrektur berücksichtigt. Die Messungen zeigen eine auffallende, später zu erklärende Anomalie und sind im tiefsten Gebiet nicht reproduzierbar.

28,382 g = 0,224 Mol.

<i>T</i>	<i>E</i>	<i>WC</i>	<i>WC<sub>k</sub></i>	<i>AW</i>
21,5	1,135	0,993	0,942	(4,22)
22,7	1,391	0,902	0,843	(3,78)
24,6	1,581	0,786	0,713	(3,19)
26,5	1,581	0,818	0,731	(3,27)
28,6	1,684	0,912	0,806	(3,61)
31,0	1,585	0,917	0,789	3,53
33,2	1,866	0,978	0,831	3,72
35,9	1,691	1,047	0,874	3,91
72,8	2,177	1,730	1,202	5,38
72,9	2,177	1,750	1,220	5,45

Andere Serie.

Jod.

28,382 g = 0,224 Mol.

<i>T</i>	<i>E</i>	<i>WC</i>	<i>WC<sub>k</sub></i>	<i>AW</i>
22,0	0,996	0,419	0,364	(1,63)
30,0	1,464	0,885	0,767	3,43
32,2	1,501	0,962	0,825	3,70
36,4	1,544	1,055	0,879	3,93
38,5	1,680	1,097	0,902	4,04

Bezüglich der wahrscheinlichsten Werte vgl. weiter unten.

Magnesiumoxyd.

Geschmolzen von der Frankfurter Scheideanstalt bezogen und im Platintiegel im Gebläse geglüht.

24,58 g = 0,6090 Mol.

<i>T</i>	<i>E</i>	<i>WC</i>	<i>WC<sub>k</sub></i>	<i>MW</i>
21,2	0,1880	0,078	-0,031	—
25,0	0,3423	0,084	-0,012	—
30,0	0,3754	0,112	-0,001	—
34,7	0,3811	0,156	-0,004	—
39,2	0,3896	0,215	0,023	0,038
42,6	0,4066	0,280	0,058	0,095
52,7	1,212	0,409	0,092	0,151
56,5	1,324	0,478	0,123	0,202
64,4	1,324	0,670	0,240	(0,394)
65,8	1,313	0,686	0,238	0,391
65,8	1,302	0,684	0,236	0,385
81,2	1,174	0,694	0,125	0,982
83,3	1,174	0,713	0,133	1,019

Bei den beiden letzten Versuchen befanden sich nur 5,2705 g = 0,1906 Mol. MgO (Kahlbaumsches Präparat) im Kalorimeter.

## Aragonit.

Schöne Kristalle wurden gepulvert und bei  $50^{\circ}$  getrocknet.

27,294 g = 0,273 Mol.

T	E	WC	WC <sub>k</sub>	MW
23,3	0,4410	0,122	0,063	0,231
26,8	0,4282	0,161	0,076	0,278
29,7	0,3964	0,209	0,100	0,366
31,9	0,4301	0,269	0,142	0,520
34,1	0,4489	0,335	0,188	0,689
35,9	0,4529	0,395	0,231	0,846
38,6	1,339	0,450	0,264	0,967
41,7	1,540	0,563	0,348	1,275
47,7	1,548	0,774	0,504	1,847
50,5	1,737	0,905	0,608	2,228
52,6	1,772	0,999	0,682	2,499
56,2	1,741	1,125	0,773	2,832

## Karborundum.

Schöne grüne Kristalle wurden gepulvert. Diese Substanz ist schon von W. Nernst<sup>1)</sup> und F. Schwerts gemessen worden, nur daß diesmal mehr als die doppelte Menge davon sich im Kalorimeter befand.

25,31 g = 0,6265 Mol.

T	E	WC	WC <sub>k</sub>	MW	MW <sup>2)</sup>
27,2	0,3340	0,083	-0,004	-	-
33,8	0,3859	0,137	-0,007	-	-
39,1	0,3916	0,176	-0,014	-	-
53,0	1,132	0,352	0,031	0,050	ca. 0,10
57,0	1,128	0,430	0,070	0,112	0,16
61,2	1,191	0,491	0,089	0,142	0,18
67,3	1,174	0,624	0,162	0,259	0,26
69,0	1,174	0,650	0,173	0,286	0,30
71,3	1,174	0,708	0,210	0,335	0,38
73,5	1,174	0,793	0,277	0,442	0,45

## Quecksilberoxyd.

Reinstes Kahlbaumsches Präparat (rote Farbe).

31,452 g = 0,146 Mol.

T	E	WC	WC <sub>k</sub>	MW
25,1	0,3038	0,360	0,287	1,973
28,7	1,199	0,446	0,346	2,378
32,6	1,199	0,558	0,425	2,921
35,7	1,207	0,610	0,450	3,093
38,7	1,207	0,660	0,473	3,251
40,5	1,215	0,720	0,526	3,615
42,4	1,215	0,798	0,577	3,966
68,4	0,184	1,246	0,774	5,320
70,4	2,586	1,317	0,828	5,691
72,5	2,586	1,339	0,831	5,712
74,7	2,586	1,365	0,840	5,775

1) Sitzungsber. d. preuß. Akad. 10. p. 355. 1914.

2) W. Nernst u. F. Schwerts.

Berylliumoxyd.

Reinstes Kahlbaumsches Präparat im Platintiegel im Gebläse geglüht.  $7,819 \text{ g} = 0,2916 \text{ Mol.}$

<i>T</i>	<i>E</i>	<i>WC</i>	<i>WC<sub>k</sub></i>	<i>MW</i>
76,8	1,471	0,601	0,059	0,202
78,1	1,474	0,614	0,064	0,219
78,6	1,431	0,610	0,057	0,195
79,3	1,494	0,624	0,066	0,226
79,7	1,479	0,633	0,071	0,243
80,3	1,494	0,629	0,065	0,223
82,6	1,766	0,646	0,069	0,236
84,9	2,940	0,669	0,080	0,274

4. Kurze Diskussion der Messungsergebnisse.

Bei allen untersuchten Substanzen, soweit es gelang, hinreichend kleine Atomwärmen zu erreichen, zeigte es sich, daß das  $T^3$ -Gesetz bei hinreichend tiefen Temperaturen mit den Messungen innerhalb der Fehlergrenzen in Einklang steht, wie W. Nernst und F. Schwers und früher schon Eucken<sup>1)</sup> und Schwers gefunden hatten. So genügt bei den einatomigen Stoffen Fe und Ca und auch bei  $\text{CaH}_2$  und dem regulären ZnS die Debyesche Formel für den gesamten Anstieg der spezifischen Wärme.

$$\text{Fe} \quad \beta v_{\text{Debye}} = 453$$

<i>T</i>	$\Delta W_{\text{beob.}}$	$\Delta W_{\text{ber.}}$
32,0	0,15	0,16
33,1	0,18	0,18
35,2	0,24	0,21
38,1	0,29	0,27
42,0	0,33	0,36
46,9	0,52	0,51
66,8	1,21	1,23
68,9	1,48	1,32
85,3	1,94	1,99
87,1	2,04	2,06
88,9	2,22	2,14
94,6	2,36	2,36

$$\text{Ca} \quad \beta v_{\text{Debye}} = 226$$

<i>T</i>	$\Delta W_{\text{beob.}}$	$\Delta W_{\text{ber.}}$	<i>T</i>	$\Delta W_{\text{beob.}}$	$\Delta W_{\text{ber.}}$
22,3	0,51	0,45	46,3	2,13	2,27
24,0	0,63	0,56	49,3	2,24	2,50
25,9	0,74	0,69	52,0	2,59	2,70
29,2	0,89	0,89	56,5	2,82	2,99
32,6	1,12	1,15	59,7	3,06	3,20
35,8	1,42	1,42	62,0	3,20	3,31
38,8	1,57	1,67			

1) Verhandlungen d. Physikal. Gesellschaft 15. p. 578—588. 1913.

Die Abweichungen zwischen Beobachtung und Berechnung erklären sich aus einer geringen Verunreinigung des Präparates.

CaH <sub>2</sub>	$\beta \nu_{\text{Debye}} = 391$	
T	MW <sub>beob.</sub>	MW <sub>ber.</sub>
69,9	1,79	1,82
71,2	1,86	1,89
72,5	1,90	1,93
79,0	2,25	2,24
80,1	2,37	2,30
80,9	2,37	2,34

Zinkblende	$\beta \nu_{\text{Debye}} = 175$	
T	MW <sub>beob.</sub>	MW <sub>ber.</sub>
21,6	0,74	0,81
25,0	1,13	1,14
28,0	1,51	1,47
30,6	1,73	1,74
32,7	2,02	1,98
34,9	2,20	2,20
36,8	2,43	2,40
38,7	2,70	2,58
44,2	3,01	3,04
48,0	3,10	3,31
51,1	3,58	3,53
53,9	3,64	3,69
56,9	3,75	3,85
58,6	4,00	3,92

Ein besonders interessanter Fall liegt beim Jod vor. Hier war eine ältere Messung von Nernst<sup>1)</sup>, deren tiefster Punkt bei 28,8° lag, zum Vergleich heranzuziehen. Die neu gefundenen Werte liegen durchgängig etwas tiefer als die Nernstschen und lassen sich durch  $\beta \nu = 106$  nach einer Debyeschen Funktion gut darstellen. Die merkwürdige und nicht im einzelnen reproduzierbare Zunahme der gemessenen Wärmekapazitäten bei ganz tiefen Temperaturen erklärt sich daraus, daß das Jod einen Umwandlungspunkt bei ganz tiefen Temperaturen hat und daß die Umwandlungswärme hier in die gemessene Wärmekapazität miteingegangen ist. Als weiterer Beweis für diese Annahme wurde folgender Versuch angestellt: Einzelne schöne Jodkristalle wurden in Glaskügelchen, die mit Wasserstoff gefüllt waren, eingeschmolzen und in flüssigen Wasserstoff getaucht. Kurzes Verweilen darin hat auf die Kristalle gar keinen Einfluß; läßt man sie aber lange darin, mindestens eine halbe Stunde, so kommen die Kristalle brüchig

1) W. Nernst, Ann. d. Phys. 36. p. 395. 1911.

und bei genügend langem Eintauchen zertrümmert heraus. Ein Beweis, daß eine Umwandlung, und zwar eine langsame Umwandlung sich hier vollzieht. An dieser Langsamkeit der Umwandlung liegt es denn auch, daß die bei ganz tiefen Temperaturen gemessenen hohen Wärmekapazitäten nicht reproduzierbar sind, und daß weder der Umwandlungspunkt, noch die Umwandlungswärme mit dem hier benutzten Apparat sich genau bestimmen lassen. Offenbar sind bei den Messungen von Nernst durch die Umwandlungswärme die Werte etwas vergrößert worden, wie auch ich bei ganz tiefen Temperaturen sinnlos hohe Werte aus dem gleichen Grunde beobachtet habe.

T	$\beta v_{\text{Debye}} = 106$		$M W_{\text{ber.}}$
	1. Serie	2. Serie	
21,5		(4,22)	2,24
22,0	(1,63)		2,33
22,7		(3,78)	2,47
24,6		(3,19)	2,74
26,5		(3,27)	3,00
28,6		(3,61)	3,26
30,0	3,43		3,42
31,0		3,53	3,53
32,2	3,70		3,66
33,2		3,72	3,74
35,9		3,91	3,98
36,4	3,93		4,02
38,5	4,04		4,18
72,8		5,38	5,38
72,9	5,45		5,39

Bei einer Reihe von Stoffen tritt sehr bemerkenswerter Weise, nachdem das  $T^3$ -Gesetz bei den allertiefsten Temperaturen gegolten hat, bei höheren Temperaturen ein viel schnellerer Anstieg ein, wie W. Nernst und F. Schwers dies schon beim Karborundum beobachtet hatten. Zur Sicherstellung dieser für die Theorie der spezifischen Wärme grundlegend wichtigen Tatsache wurden die Messungen am Karborundum reproduziert, und hier wie auch besonders deutlich beim Magnesiumoxyd und Aragonit zeigte sich der schnellere Anstieg. Die Erklärung hierzu ist gegeben in einer von Nernst<sup>1)</sup> schon früher entwickelten Theorie. Danach fällt

1) W. Nernst, Göttinger Vorlesungen VI, 1914, Kinetische Theorie fester Körper.

allerdings die Energie der Molekülschwingungen im Sinne der Debyeschen Funktion ab, wohingegen die inneren Schwingungen der Atome, deren Energie bei höheren Temperaturen wesentlich wird, der Einsteinschen Theorie folgen. Demgemäß müssen sich die Messungsergebnisse durch Superposition einer Einsteinschen Funktion über die Debyesche darstellen lassen.

$$\text{MgO} \quad \begin{aligned} \beta v_{\text{Debye}} &= 768 \\ \beta v_{\text{Einstein}} &= 552 \end{aligned}$$

<i>T</i>	<i>MW<sub>beob.</sub></i>	<i>MW<sub>ber.</sub></i>
39,2	0,038	0,062
42,6	0,095	0,090
52,7	0,151	0,151
56,5	0,202	0,218
(64,4)	0,394	0,366)
65,8	0,391	0,391
65,8	0,388	0,391
81,2	0,982	0,988
83,3	1,019	1,059

$$\text{Aragonit} \quad \begin{aligned} \beta v_{\text{Debye}} &= 317 \\ \beta v_{\text{Einstein}} &= 280 \end{aligned}$$

<i>T</i>	<i>MW<sub>beob.</sub></i>	<i>MW<sub>ber.</sub></i>
23,3	0,231	0,190
26,8	0,278	0,297
29,7	0,366	0,406
31,9	0,520	0,531
34,1	0,689	0,686
35,9	0,846	0,824
38,6	0,967	1,018
41,7	1,28	1,28
47,7	1,85	1,85
50,5	2,23	2,16
52,6	2,50	2,50
56,2	2,83	2,83

$$\text{SiC} \quad \begin{aligned} \beta v_{\text{Debye}} &= 913 \\ \beta v_{\text{Einstein}} &= 593 \end{aligned}$$

<i>T</i>	<i>MW<sub>beob.</sub></i>	<i>MW<sub>ber.</sub></i>
53,0	0,050	0,101
57,0	0,112	0,132
61,2	0,142	0,178
67,3	0,259	0,259
69,0	0,286	0,286
71,3	0,335	0,328
73,5	0,442	0,390

$$\begin{array}{ll} \text{HgO} & \beta v_{\text{Debye}} = 134 \\ & \beta v_{\text{Einstein}} = 417 \end{array}$$

<i>T</i>	<i>MW</i> <sub>beob.</sub>	<i>MW</i> <sub>ber.</sub>
25,1	1,97	1,97
28,7	2,38	2,44
32,6	2,92	2,91
35,7	3,09	3,22
40,5	3,62	3,64
44,1	3,97	3,83
68,4	5,32	5,44
70,4	5,69	5,55
72,5	5,71	5,71
74,7	5,78	5,81

$$\begin{array}{ll} \text{BeO} & \beta v_{\text{Debye}} = 1010 \\ & \beta v_{\text{Einstein}} = - \end{array}$$

<i>T</i>	<i>MW</i> <sub>beob.</sub>	<i>MW</i> <sub>ber.</sub>
76,8	0,202	0,202
78,1	0,219	0,214
78,6	0,195	0,217
79,3	0,226	0,224
79,7	0,243	0,228
80,3	0,223	0,231
82,6	0,236	0,253
84,9	0,274	0,273

Daß diese Messungsreihe hier sich mit dem  $T^3$ -Gesetz allein darstellen läßt, liegt wohl nur daran, daß bei diesen ganz kleinen Molekularwärmern die Energie der Atomschwingungen noch unmerklich ist.

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Professor Dr. Nernst, auf dessen Anregung die vorliegende Arbeit entstanden ist, für das mir stets bewiesene wohlwollende Interesse meinen herzlichsten Dank geziemend auszusprechen.

**Zusammenfassung.**

1. Es werden einige Verbesserungen der Nernst-Schwerschen Methode zur Bestimmung wahrer spezifischer Wärmen bei tiefen Temperaturen angegeben.
2. Es werden neue Fälle des Anstieges der spezifischen Wärme gefunden, an welchen sich das  $T^3$ -Gesetz bestätigt.
3. Es werden Fälle gefunden, bei denen nach anfänglicher Geltung des  $T^3$ -Gesetzes ein sehr viel schnellerer Anstieg der spezifischen Wärme erfolgt.
4. Es wird gezeigt, daß diese Fälle sich nach einer von W. Nernst schon früher entwickelten Theorie erklären lassen.
5. Es wird ein Umwandlungspunkt des Jods bei tiefen Temperaturen entdeckt.

(Eingegangen 6. November 1916.)

---

3. *Über die Elektronenemission des Calciumoxyds  
in Gasen und im extremen Vakuum;  
von Werner Germershausen.*

(Leipziger Dissertation.)

(Hierzu Tafel IV.)

[Fortsetzung.]

IV. Kontrollversuche.

Nachdem das Auftreten der anormalen Stromspannungscharakteristik im Stickstoff, wie es der Vorversuch gezeigt hatte, durch wiederholtes Experiment mit demselben Versuchsrohr nach mehrmaligem Auswechseln der Kathode als reproduzierbar gefunden und die erwähnte gesetzmäßige Abhängigkeit der Störung von der Kathodentemperatur, dem Gasdruck und der angelegten Spannung bestätigt worden war, erschien es, wie erwähnt, von Wichtigkeit, die Untersuchungen an der CaO-Elektrode im Stickstoff mit dem neuen Versuchsrohr einer Nachprüfung zu unterziehen. Abgesehen von der geometrischen Elektrodenanordnung, hatte man auch die Gewähr für einen relativ größeren Reinheitsgrad, was von besonderem Interesse für den besagten Störungseffekt sein mußte. Die Anordnung des ersten Kontrollversuches im Stickstoff war dieselbe wie die bei den quantitativen Messungen im Wasserstoff angewendete. Für die Einleitung des Stickstoffs wurde wieder die schon im Vorversuch beschriebene Einrichtung benutzt. Es befand sich also zwischen dem Kalium und dem Versuchsrohr eine in flüssiger Luft gekühlte Gasfalle. Schon die Messungen, die mit dem beim Vorversuch verwendeten Entladungsrohr im Stickstoff angestellt worden waren, hatten gezeigt, daß durch längeres Erhitzen des Versuchsrohres, also durch eine bessere Entgasung, die Stärke des Störungseffektes vermindert werden konnte. In dem gleichen Sinn gestalteten sich nun auch die Resultate, die mit dem neuen Versuchsrohr im Stickstoff gewonnen wurden. Obwohl man es hierbei erreichen konnte, die Ionenbeweglichkeit so

weit zu steigern, daß noch bei 1 mm Druck schon bei 20 Volt die leuchttende Entladung einsetzte, so trat doch immer, wenn auch nur innerhalb eines sehr engen Temperatur- und Spannungsintervalls, die anormale Stromspannungscharakteristik auf. Es kann jedoch darauf verzichtet werden, nochmals ausführlich an Hand einer Versuchsreihe auf diese Störungsscheinung einzugehen. Um jedoch endgültig festzustellen, daß diese Störung nicht mit einer chemischen Veränderung der Kathode im Zusammenhang steht, sei nur darauf hingewiesen, daß trotz stundenlanger Belastung im Stickstoff die CaO-Elektrode nach Wiederherstellung des Vakuums stets einen unveränderten Effekt zeigte. Nachdem es aber bei diesem Kontrollversuch trotz der besseren Vakuumbedingungen nicht gelungen war, einen Reinheitsgrad zu erzielen, der für die Empfindlichkeit des Stickstoffs gegen elektronegative Gasreste genügte, war auch erwiesen, daß der Vakuumeffekt selbst noch entstellt war. Bei den angewendeten Versuchsmitteln, die man zunächst für die Gewinnung des erreichbaren Reinheitsgrades als ausreichend anerkennen mußte, war es zunächst schwierig, die Ursache dieser Verunreinigungen ausfindig zu machen, wenn auch trotz der Anwendbarkeit des Kaliums zur Beseitigung reaktionsfähiger Gase, die von anderen Forschern betont wird, die Vermutung nahe lag, daß man auch trotz der oben beschriebenen Vorsichtsmaßregeln bei der Einführung des Kaliums in die Versuchsanordnung wohl kaum eine vollkommene Reinheit des Metalles erzielt, ganz abgesehen von den starken Verunreinigungen, die bei den ersten Destillationen des Kaliums im Vakuum frei werden und die in einer dauernd gekühlten Gasfalle kondensiert werden müssen. Ein weiterer Kontrollversuch, bei dem keine dauernd gekühlte Gasfalle zwischen Versuchsrohr und Kalium eingeschaltet worden war, bestätigte diese Vermutung. Zugleich erbrachte dieser zweite Kontrollversuch auch eine Aufklärung über die Ursache der periodenhaften Schwankungen des Vakuumeffektes. Bei allen Meßreihen nämlich, bei denen das Versuchsrohr nicht durch eine dauernd gekühlte Gasfalle vor den bei der Destillation des Kaliums mitverdampfenden Verunreinigungen geschützt war, gelang es auch nach langerem Erhitzen nicht mehr, einen konstanten Vakuumeffekt zu erzielen. Entweder zeigte die Elektrode schon nach kurzer

Belastung eine Abnahme des Effektes oder es wurde bei tage-langer Versuchsdauer besonders nach längeren Perioden der Ruhe ein Herabsinken der Elektronenemission beobachtet. Durch mehrstündigtes Ausglühen der Elektrodenbleche und Erhitzen des ganzen Versuchsrohres konnte der herabgesunkene Effekt wieder erhöht werden. Um seine außerordentliche Empfindlichkeit zu charakterisieren, sei auch hier erwähnt, daß bei nicht volliger Reinheit der Anode eine kurze Erhitzung derselben ebenfalls eine Herabsetzung des Effektes verursacht. Ebenso trat bei Temperaturvariation der Kathode die allgemein beobachtete Verzögerungerscheinung auf, die jedoch, wie aus späteren Versuchen hervorging, nach Be seitigung der Restgase verschwand, so daß man in dieser Hysteresis geradezu ein Kriterium für die Gegenwart von Restgasverunreinigungen besitzt. Wie außerordentlich stark auch die Austrittsarbeit des Elektrons durch diese Restgase beeinflußt wird, wurde im weiteren Verlauf der Untersuchung erkannt. Eine Erklärung für alle diese Erscheinungen, die bei fast allen vorliegenden Arbeiten mehr oder weniger stark auftreten und von einigen Forschern in ursächlichen Zusammenhang mit dem Emissionsmechanismus des CaO gebracht worden sind, gibt die Annahme einer Adsorptions schicht der Restgase auf der Kathodenoberfläche. Von der chemischen Natur dieser Restgase, d. h. von ihrer Reaktionsfähigkeit mit dem Kathodenmaterial, hängt es ab, ob die durch sie verursachte, die Elektronenemission stets herab setzende Störung nur temporärer Art ist oder ob durch die Restgase eine chemische Veränderung der Kathode erfolgt, die dann natürlich nicht reversibel ist, sondern allmählich eine vollkommene unaufhaltsame Inaktivierung herbeiführt. Bei der großen Empfindlichkeit des CaO gegen Wasserdampf und Kohlenwasserstoff ist es also ganz erklärlich, daß bei unvollkommenen Versuchsbedingungen die Oxydschicht chemisch zerstört wird und langsam verschwindet. Schon von A. Wehnelt<sup>1)</sup> ist im Jahre 1906 darauf hingewiesen worden, daß bei der Verwendung der CaO-Elektrode für rein technische Zwecke es durchaus unzulässig ist, an dem Ventilrohr irgendwelche mit Fett oder Siegellack gedichtete Schritte an zubringen, da hierdurch das CaO durch die unentfernbaren

1) A. Wehnelt, Ann. d. Phys. 19. p. 156. 1906.

Restgase chemisch schnell zerstört und damit seine Wirksamkeit vernichtet wird. Bei den allerersten Versuchen, bei denen mit Schlitzen gearbeitet wurde, konnte auch ich die von anderer Seite gemachte Beobachtung bestätigen, daß die Oxydschicht sich allmählich schwärzte, oder man durch Befeuchten der Kathode mit Wasser durch die Entwicklung von Acethylen ihre Umbildung zu Calciumkarbid erkannte. Sind dagegen die Restgase nicht reaktionsfähig mit dem Elektrodenmaterial, so wird sich nur eine von der Stärke der Adsorptionsschicht abhängende Störung elektrischer Natur ausbilden, die durch Abdestillation der Gasschicht aufgehoben werden kann. Nachdem nun aber durch diesen Kontrollversuch die Ursache des von mehreren Seiten beobachteten anormalen Verhaltens der CaO-Elektrode im Vakuum aufgedeckt war, war nach den gewonnenen Ergebnissen über die Elektronenemission des CaO im Wasserstoff der Emissionstheorie der Wehneltelektrode auf elektrochemischer Basis die letzte Stütze genommen. Zugleich ergab sich aber auch die Forderung, die Elektronenemission des CaO in dem nach der obigen Beweisführung theoretisch erreichbaren absoluten Vakuum quantitativ zu untersuchen, besonders nachdem dieser Kontrollversuch die Schädlichkeit der Kaliumzelle zutage geführt hatte. Tatsächlich gelang es dann auch, zuerst durch weitere Vorsichtsmaßregeln gegen die schädlichen Verunreinigungen des Kaliums, später durch Ausschluß des Kaliums überhaupt, mit der CaO-Elektrode die Raumladungscharakteristik quantitativ zu bestätigen, d. h. ein Vakuum zu erzielen, welches trotz großer Belastung der CaO-Elektrode praktisch frei von positiven Ionen blieb. Abgesehen von der Bedeutung der Raumladungserscheinung in dieser Hinsicht für das Problem der vorliegenden Untersuchung war von besonderem Interesse die quantitative Festlegung der Konstanten der Richardsonschen Gleichung in einem solchen von Restgasen freien Vakuum. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden wird, tritt bei weiterer Verbesserung des Vakums nicht etwa eine Verringerung des Effektes ein, sondern, wie bereits aus den obigen Ausführungen zu folgern ist, liegt die wahre Ergiebigkeit des CaO ganz bedeutend oberhalb aller bisher beobachteter Emissionswerte. Durch das Auftreten der Raumladungserscheinung an sich, besonders aber

durch den Nachweis der Existenz des reinen viel stärkeren Emissionsvermögens des CaO wird dann der Ring der vorliegenden Beweisführung geschlossen.

V. Die Richardsonsche Gleichung und der Raumladungsgrenzstrom.

Über die im Laufe der Zeit ziemlich umfangreich gewordene Theorie der Elektronenemission glühender Körper, sowie über die Elektrizitätsleitung im absoluten Vakuum ist vor kurzem von W. Schottky<sup>1)</sup> eine zusammenfassende Darstellung gegeben, zugleich mit einigen Hinweisen auf die auch in der vorliegenden Arbeit behandelten Diskrepanzen. Es genügt daher, wenn hier lediglich auf die bei der rechnerischen Kontrolle der Versuchsergebnisse in Betracht kommenden Bestimmungsgleichungen und Auswertungsmethoden näher eingegangen wird. Bei der Darstellung der Resultate der folgenden Versuche im extremen Vakuum sind zwei funktionale Beziehungen von fundamentaler Bedeutung. Die eine stellt den Elektrodenstrom als Funktion der Kathoden temperatur dar und wird mathematisch ausgedrückt durch die Richardsonsche Gleichung<sup>2)</sup>, welche unter der Annahme, daß sich die Elektronen im Metall wie Gasmoleküle verhalten und dem Maxwellsehen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz gehorchen, folgende Form annimmt:

$$J = n \varepsilon \sqrt{\frac{R T}{2 \pi m}} \cdot e^{-\frac{\psi}{k T}}.$$

Hier ist  $J$  der Sättigungsstrom,  $n$  die Anzahl der Elektronen im Kubikzentimeter der emittierenden Substanz,  $T$  die absolute Temperatur,  $R$  die Gaskonstante für ein einzelnes Elektron,  $\varepsilon$  seine Ladung,  $m$  seine Masse und  $\psi$  die Arbeit, die es beim Austritt aus dem Molekülverband leistet. Setzt man:

$$A = n \varepsilon \sqrt{\frac{R}{2 \pi m}}; \quad B = \frac{\psi}{k},$$

so erhält man die bekannte Formel:

$$J = A \sqrt{T e^{-\frac{B}{T}}}.$$

1) W. Schottky, Jahrb. d. Radiakt. u. Elektron. **12**. p. 147. 1915.

2) O. W. Richardson, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektron. **1**. p. 300. 1904.

Die zweite Beziehung stellt den Elektronenstrom als Funktion des angelegten Potentials und des Elektrodenabstandes dar und findet ihren mathematischen Ausdruck in der zuerst von Child<sup>1)</sup> für positive Ionen, später unabhängig davon von Langmuir<sup>2)</sup> und Schottky<sup>3)</sup> aufgestellten Raumladungsgleichung:

$$i = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{V^{3/2}}{a^3}$$

Diese Charakteristik wurde experimentell schon früher von Lilienfeld<sup>4)</sup> beobachtet und im Sinne einer Raumladungstheorie gedeutet. Von ihm wurde jedoch mit besonderem Nachdruck darauf hingewiesen<sup>5)</sup>, daß im Gegensatz zu dem von ihm gefundenen quadratischen Gesetz, die Stromwerte, die mit der  $3/2$ -Potenz des Potentials ansteigen, sich durchaus inkonstant zeigten.

In der obigen Raumladungsgleichung ist  $i$  der durch die Raumladung begrenzte, also von der Kathodentemperatur unabhängige Elektronenstrom.  $V$  bedeutet das angelegte Potential,  $a$  ist der Abstand der parallelen ebenen Elektroden. Diese beiden Bestimmungsgleichungen stehen durch folgende Überlegung in logischem Zusammenhang: Gibt man eine bestimmte Temperatur und den dadurch bestimmten Sättigungsstrom vor, so folgt (in dem Stromspannungsdiagramm) der übergehende Elektrodenstrom bei zunehmendem Potential so lange der obigen Raumladungsgleichung, d. h. der Strom wird so lange durch die Raumladung begrenzt, bis eine Spannung erreicht ist, deren Raumladungsgrenzstrom oberhalb des Sättigungsstromes liegt. Theoretisch müssen also alle beobachteten Stromwerte entweder durch die eine oder durch die andere Gleichung bestimmt sein, so daß tatsächlich alle bei jeder Spannung und jeder Kathodentemperatur gemessenen Elektronenströme im absoluten Vakuum rechnerisch kontrollierbar sind (vgl. Langmuir). Da, wie ersichtlich, der Raumladungsgrenzstrom umgekehrt proportional dem Quadrate des

---

- 1) J. F. Child, Phys. Rev. **32**, p. 492. 1911.
- 2) I. Langmuir, Phys. Rev. **2**, p. 450. 1913.
- 3) W. Schottky, Physik. Zeitschr. **15**, p. 656. 1914.
- 4) J. E. Lilienfeld, Habilitationsschrift 1910.
- 5) J. E. Lilienfeld, Ann. d. Phys. **48**, p. 28. 1914.

Elektrodenabstandes ist, hat man es natürlich in der Hand, diesen Abstand der Ergiebigkeit der Kathode anzupassen und damit das Temperaturintervall abzustecken, in dem der Elektronenstrom nicht durch die Raumladung begrenzt, also durch die Richardsonsche Gleichung bestimmt ist. Bei der Auswertung der konstanten  $A$  und  $B$  dieser Gleichung wurde nach dem von Richardson angegebenen Verfahren vorgegangen. Die Richardsonsche Gleichung lautet logarithmiert:

$$\lg J = \lg A + \frac{1}{2} \lg T - \frac{B}{T} \lg e .$$

Setzt man in dieser Gleichung:

$$u = \frac{1}{T} ,$$

$$v = \lg J - \frac{1}{2} \lg T ,$$

$$a = \lg A ,$$

$$b = B \cdot \lg e ,$$

so erhält man die Gleichung einer Geraden:

$$v = a - b u .$$

Erfüllen also die Versuchsergebnisse die Bedingungen der Richardsonschen Gleichung, so müssen die erhaltenen Werte für  $u$  und  $v$  auf dieser Geraden liegen, wenn man sie als Abszissen und Ordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem einträgt.

Die graphische Darstellung der Raumladungsbedingung geschieht am besten in der Weise, daß man die in Volt/Ampere-Einheiten und nach Einführung des Wertes von  $e/m$  für Elektronen lautende Raumladungsgleichung:

$$i = \frac{2,38 \cdot 10^{-6} \cdot V^{3/2}}{a^2}$$

logarithmiert:

$$\lg i = \lg 2,38 \cdot 10^{-6} - 2 \lg a + \frac{3}{2} \lg V .$$

Führt man als neue Variable ein:

$$y = \lg i$$

$$x = \lg V$$

$$c = \lg 2,38 \cdot 10^{-6} - 2 \lg a ,$$

so erhält man wiederum die Gleichung einer Geraden:

$$y = c + \frac{3}{2} x .$$

Es müssen also theoretisch die Logarithmen aller Stromwerte, die durch die Raumladung begrenzt, also von der Temperatur unabhängig sind, auf dieser Geraden mit dem Richtungsfaktor  $\frac{3}{2}$  liegen, die die Ordinatenachse im Abstande  $c$  schneidet. Bei der rechnerischen Kontrolle der nachfolgenden Versuchsergebnisse ist also das logarithmische Stromspannungsdiagramm am übersichtlichsten. In diesem Diagramm wird die Gesetzmäßigkeit der Richardsonschen Gleichung durch parallel zur Abszisse verlaufende Gerade dargestellt, deren Abstand sich aus den aus den Versuchsresultaten zu bestimmenden Konstanten ergibt. Die Bedingungen der Raumladungsgleichung stellen sich, wie gesagt, in diesem Diagramm ebenfalls durch eine Gerade dar. Diese verläuft mit dem Richtungsfaktor  $\frac{3}{2}$  gegen die Geraden der Richardsonschen Gleichung und schneidet die Ordinate in einem durch die Länge der Entladungsbahn bestimmten Abstand. Aus diesem Diagramm kann also gleichzeitig die gewonnene Übereinstimmung der Meßresultate mit beiden durch die Theorie geforderten Gesetzmäßigkeiten ersehen werden.

Zum ersten Male gelang es bei den vorliegenden Untersuchungen durch die in der Vorveröffentlichung<sup>1)</sup> beschriebenen Vorsichtsmaßregeln die Raumladungerscheinung in quantitativer Übereinstimmung mit den aus dem Elektrodenabstand berechneten Stromwerten nachzuweisen. Bei dieser Anordnung war durch Einschalten einer zweiten Gasfalle, die gleichzeitig mit dem Versuchsröhr hoch erhitzt und dann in flüssige Luft gesetzt worden war, für die Beseitigung der aus dem Kontrollversuch erkannten schädlichen Einflüsse des Kaliums gesorgt worden. Eine Erleichterung der Arbeitsweise wurde jedoch erst durch völligen Ausschluß des Kaliums erreicht. Die endgültig angewendete Versuchsanordnung, mit der die Raumladungerscheinung quantitativ bei jeder verwendeten Wehnelt-elektrode nachgewiesen und verhältnismäßig leicht reproduziert werden kann, ist in Fig. 10<sup>1</sup> schematisch dargestellt. Das Versuchsröhr  $V$  hatte die in Fig. 6 näher beschriebene Konstruktion, die sich außerordentlich gut bewährte, wenn

1) W. Germershausen, l. c.

auch bei der Kompliziertheit des Apparates hin und wieder das Springen einer der acht Einschmelzstellen unvermeidlich war. Die Evakuierung geschah in folgender Weise: Zuerst

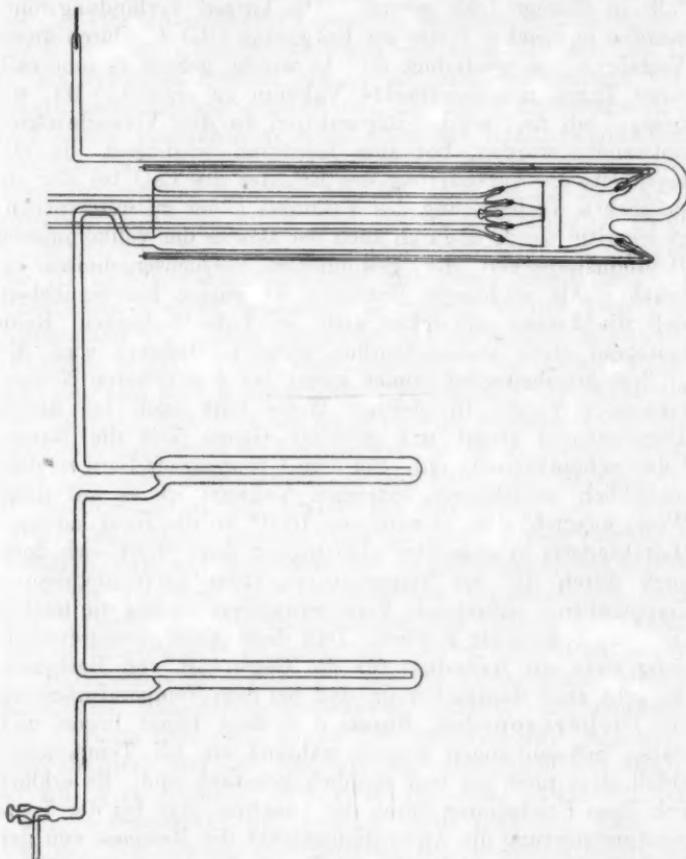


Fig. 10.

wurden gleichzeitig das Versuchsrohr und die beiden Gasfalle auf ca.  $450^{\circ}$  erhitzt und ebenso die CaO-Elektrode und die Elektrodenbleche einige Stunden ausgeglüht. Dann wurde die der Pumpe zunächst liegende Gasfalle abgekühlt und in flüssige Luft gesetzt, während die andere Gasfalle

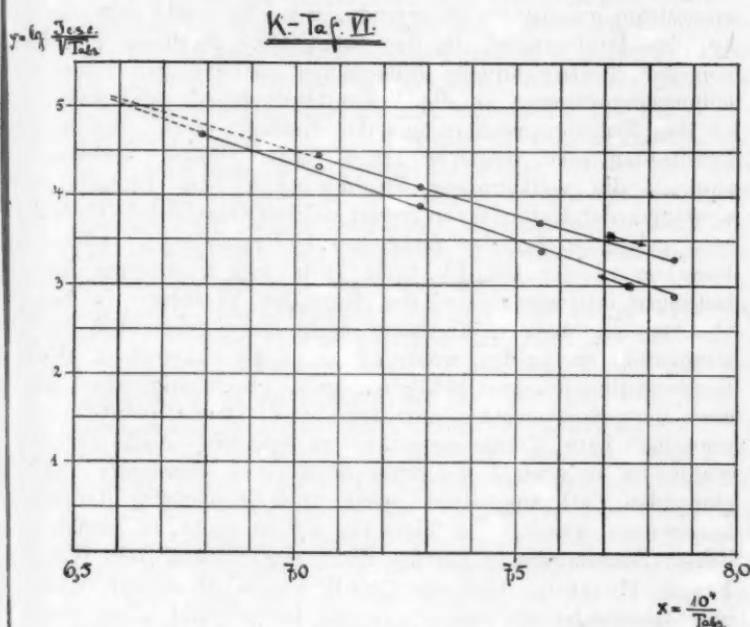
und das Versuchsrohr einige Stunden weitererhitzt blieben. Hierauf wurde in gleicher Weise mit der zweiten Gasfalle verfahren, und zuletzt das Versuchsrohr abgekühlt und ebenfalls in flüssige Luft gesetzt. Die kurzen Verbindungsrohre wurden in gleicher Weise zur Entgasung erhitzt. Durch dieses Verfahren, das wiederholt erprobt wurde, gelingt es innerhalb eines Tages, das gewünschte Vakuum zu erzielen. Da, wie gesagt, hin und wieder Reparaturen an den Versuchsrohren notwendig wurden, bot sich hierdurch wiederholt die Gelegenheit, die Veränderung des Effektes des CaO bei der allmählichen Verbesserung des Vakuums näher zu untersuchen; gleichzeitig wurde dadurch auch der Beweis der vollkommenen Reproduzierbarkeit der gewonnenen Versuchsergebnisse erbracht. Als wichtigste Tatsache ist zuerst hervorzuheben, daß die Emissionsfähigkeit sich bei fortschreitendem Reinheitsgrad stets außerordentlich steigert. Hierbei wird der größere Reinheitsgrad immer zuerst bei den höheren Temperaturen erreicht. In gleicher Weise tritt auch bei diesen Temperaturen zuerst mit größerer Genauigkeit die Raumladungscharakteristik auf. Bei dem Übergangsstadium zu dem schließlich erreichbaren extremen Vakuum ist es auf diese Weise möglich, daß, obwohl von  $1000^{\circ}$  an die Raumladungscharakteristik in ziemlicher Genauigkeit erreicht ist, sich doch noch durch die bei Temperaturvariation nach niedrigeren Temperaturen auftretende Verzögerungerscheinung die letzten Gasreste bemerkbar machen. Daß diese Verzögerungerscheinung stets ein Kriterium für die Gegenwart von Restgasen ist, geht auch daraus hervor, daß bei dem Temperaturanstieg die Richardsonschen Konstanten stets höher liegen und starke Schwankungen zeigen, während sie bei Temperaturabfall stets niedriger und ziemlich konstant sind. Es erklärt sich diese Erscheinung durch die Annahme, daß bei der Temperatursteigerung die Adsorptionsschicht der Restgase von der Kathode langsam abdestilliert. Durch die Gegenwart dieser Adsorptionsschicht elektronegativer Gasreste wird natürlich die Austrittsarbeit des Elektrons erhöht. Bei der Abdestillation der Gasschicht wird die Austrittsarbeit zwar kleiner, gleichzeitig aber auch die Richardsonsche Gesetzmäßigkeit gestört werden. Bei der angewendeten Höchsttemperatur wird dann die Kathode bis zu einem gewissen Grade von der

Adsorptionsschicht befreit sein. Dieser Reinheitsgrad verschlechtert sich bei sinkender Temperatur nur langsam, so daß die Richardsonsche Gesetzmäßigkeit ziemlich ungestört erscheint, obwohl natürlich bei allen Resultaten ein konstanter, von dem bei der Höchsttemperatur erreichten Reinheitsgrad abhängender Korrektionsfaktor anzubringen sein kann. In der Tab. 19 ist ein typisches Beispiel für die allgemein beobachtete Verzögerungerscheinung gegeben und die bei Temperaturanstieg und -abfall beobachteten Konstanten der Richardsonschen Gleichung eingetragen. Wie ersichtlich, zeigen sich bei dem Temperaturanstieg ziemliche Abweichungen von der Richardsonschen Gesetzmäßigkeit und die Konstanten sind beide im Mittel sehr hoch. Bei dem Temperaturabfall ist dagegen die Richardsonsche Gleichung viel besser erfüllt und die Konstanten sind zu bedeutend niedrigeren Werten gesunken. Kurventafel 6 gibt eine graphische Darstellung der Richardsonschen Beziehung bei Temperaturanstieg und -abfall. Nachdem sich also bei der allmählichen Verbesserung des Vakuums gezeigt hatte, daß trotz des Auftretens der berechneten Raumladungscharakteristik bei höheren Temperaturen, dennoch Restgase vorhanden sein können, die sich durch eine Störung der Richardsonschen Konstanten bei den niedrigeren Temperaturen bemerkbar machen, gelangt man zu dem wichtigen Resultat, daß das Auftreten der Raumladungscharakteristik ohne die Kenntnis der angewendeten Kathodentemperatur kein Kriterium für den Reinheitsgrad des Vakuums ist, nachdem natürlich überhaupt schon ein Vakuum erreicht ist, indem bei irgendeiner Temperatur der aus der Elektrodenanordnung berechnete Raumladungsgrenzstrom auftritt. Angenommen, das Vakuum hätte sich in der Zeit zwischen zwei Meßreihen verschlechtert und die Kathode eine Gasschicht adsorbiert, so würde es dennoch, und zwar von einer etwas höheren Kathodentemperatur an, möglich sein, praktisch dieselben von der Temperatur unabhängigen Raumladungsgrenzströme festzustellen wie bei den vorhergehenden Meßreihen, die Gegenwart der letzten Restgase sich also vollkommen der Beobachtung entziehen. Es erklärt sich dies daraus, daß diese letzten Restgase nur eine Störung der Raumladungscharakteristik hervorrufen, die innerhalb der Meßfehler der Versuchskonstanten, vor allem des angelegten Potentials und des

Tabelle 19.

Temp.	$x = \frac{1}{T_{\text{abs.}}}$	$J \text{ Amp.}$	$J_{e \cdot s \cdot e}$	$y$	$b$	$B$	$\psi$	$\delta_s$	$a$	$A$
1000° C	7,8554 · 10 <sup>-4</sup>	9,30 · 10 <sup>-4</sup>	2,790 · 10 <sup>4</sup>	2,8932	1,5730	36220	4,85 · 10 <sup>-13</sup>	3,12 Volt	15,232	1,79 · 10 <sup>15</sup>
1050° C	7,5586 · 10 <sup>-4</sup>	2,79 · 10 <sup>-4</sup>	8,370 · 10 <sup>4</sup>	3,3619	19240	44300	5,94 · 10 <sup>-13</sup>	3,81 "	17,9019	7,98 · 10 <sup>17</sup>
1100° C	7,2833 · 10 <sup>-4</sup>	9,61 · 10 <sup>-5</sup>	2,883 · 10 <sup>7</sup>	3,8910	17070	40230	5,39 · 10 <sup>-13</sup>	3,45 "	16,6170	4,14 · 10 <sup>16</sup>
1150° C	7,0275 · 10 <sup>-4</sup>	2,74 · 10 <sup>-4</sup>	8,220 · 10 <sup>5</sup>	4,3383	19200	44290	5,93 · 10 <sup>-13</sup>	3,81 "	17,8583	7,20 · 10 <sup>17</sup>
1200° C	6,7889 · 10 <sup>-4</sup>	8,00 · 10 <sup>-4</sup>	2,400 · 10 <sup>6</sup>	4,7961	<b>A = <math>5,19 \cdot 10^{17}</math></b> Mittelwert		<b>B = <math>41260</math></b> Mittelwert		<b>B = <math>32528</math></b> Mittelwert	
1200° C	6,7889 · 10 <sup>-4</sup>	8,000 · 10 <sup>-4</sup>	2,400 · 10 <sup>6</sup>	4,7961	14350	33040	4,40 · 10 <sup>-13</sup>	2,85 "	14,5376	3,44 · 10 <sup>-14</sup>
1150° C	7,0275 · 10 <sup>-4</sup>	3,456 · 10 <sup>-4</sup>	1,036 · 10 <sup>6</sup>	4,4546	14460	33300	4,46 · 10 <sup>-13</sup>	2,86 "	14,6154	4,12 · 10 <sup>-14</sup>
1100° C	7,2833 · 10 <sup>-4</sup>	1,503 · 10 <sup>-4</sup>	4,500 · 10 <sup>5</sup>	4,0844	14470	33300	4,46 · 10 <sup>-12</sup>	2,86 "	14,6264	4,23 · 10 <sup>-14</sup>
1050° C	7,5586 · 10 <sup>-4</sup>	5,890 · 10 <sup>-4</sup>	1,767 · 10 <sup>5</sup>	3,6864	13230	30470	4,08 · 10 <sup>-12</sup>	2,62 "	13,7320	5,40 · 10 <sup>-13</sup>
1000° C	7,8554 · 10 <sup>-4</sup>	2,330 · 10 <sup>-4</sup>	6,990 · 10 <sup>4</sup>	3,2921	<b>A = <math>3,08 \cdot 10^{14}</math></b> Mittelwert		<b>B = <math>32528</math></b> Mittelwert		<b>B = <math>32528</math></b> Mittelwert	

Elektrodenabstandes liegt. Abgesehen von der Bedeutung der Erreichbarkeit der Raumladungsbedingungen für den Emissionsmechanismus der Kathode überhaupt, ist sie also an sich noch nicht ein Kriterium dafür, einen bei jeder Temperatur ungestörten Richardsoneffekt zu messen. Ein Kriterium für die Beurteilung des erzielten Reinheitsgrades ist vielmehr die Kenntnis der unteren Temperaturgrenze, bis zu



der die Raumladungscharakteristik quantitativ auftritt, ferner die Festlegung des Temperaturintervalls, innerhalb dessen bei Temperaturvariation keine Verzögerung des Effektes zu beobachten ist, die Richardsonschen Konstanten also unabhängig von der Kathodentemperatur sind. Wenn es sich darum handelt, die Richardsonschen Konstanten eines reinen Metalles festzustellen, so wird dem Auftreten des vorher berechneten Raumladungsgrenzstromes an sich keine weitere Bedeutung beizumessen sein, als daß dadurch in der angegebenen Weise eine Beurteilung des erzielten Reinheits-

grades ermöglicht wird. Eine vollkommen andere Bedeutung ist jedoch dem Auftreten dieses Raumladungsgrenzstromes für das Problem der vorliegenden Arbeit zuzusprechen. Von dem Standpunkt der Erfahrungen mit der Wehneltelektrode, von dem aus die vorliegenden Untersuchungen begonnen wurden, erschien es überhaupt unmöglich, mit der CaO-Elektrode die Raumladungswirkung bis zu dem vorher berechneten, nur von der Elektrodenkonfiguration abhängigen Raumladungsgrenzstrom quantitativ zu reproduzieren. Es ergibt sich dies aus den Forderungen, die der quantitative Nachweis dieses von der Elektronenquelle vollkommen unabhängigen Raumladungsgrenzstromes an die Vakuumbedingungen und damit an den Emissionsmechanismus der Kathode stellt. Mit der Beseitigung aller positiver Ionen fordert dieser Nachweis zugleich die vollkommene Unabhängigkeit des Emissionsvorganges der Kathode von irgend welcher Gasabgabe. Einerseits gelang es bei den bisherigen Untersuchungen anderer Forscher an der CaO-Elektrode trotz viel niedrigerer Belastungen, als wie sie bei den folgenden Versuchen zu beobachten sein werden, überhaupt nicht einen konstanten Vakuumeffekt zu erzielen, wofür allerdings die elektrochemische Emissionstheorie eine Erklärung gab, gleichzeitig aber es auch unmöglich erschien, mit der CaO-Elektrode quantitativ reproduzierbare Versuchsresultate zu erzielen. Andererseits wurde bisher auch fast immer direkt eine Gasabgabe des glühenden CaO konstatiert, wenn auch gleichzeitig darauf hingewiesen wurde, daß diese Gasabgabe nicht in ursächlichem Zusammenhang mit der Elektronenemission steht (vgl. Frank Horton). Daß die CaO-Elektrode überhaupt ohne jede Gasabgabe wirksam ist, wurde bisher wohl allein von Lilienfeld<sup>1)</sup> behauptet, auf Grund ihrer Identität mit einer Tantalelektrode in bezug auf die von Lilienfeld beobachtete quadratische Entladungscharakteristik im extremen Vakuum. Den endgültigen Beweis hierfür kann jedoch, abgesehen von den Resultaten in reaktionsfähigen Gasen, nur ein quantitativer Nachweis der Raumladungerscheinung erbringen auf Grund der oben zitierten *Raumladungsgleichung*. Die Anforderung, die damit an die Versuchsbedingungen gestellt wird, steigern sich insofern, als man nicht wie bei den

1) J. E. Lilienfeld, I. c.

quantitativen Messungen im Wasserstoff nur relative Verhältniszahlen der verschiedenen Elektronenströme unter sich untersucht, sondern jetzt die durch die Raumladungswirkung festgelegten, allein durch den Elektrodenabstand bestimmten absoluten Stromwerte experimentell nachzuweisen hat, die an sich vollkommen unabhängig von der Art und der Ergiebigkeit der Elektronenquelle sind.

Es wurden im ganzen mit fünf verschiedenen Wehnelt-elektroden bei verschiedenen Elektrodenabständen die berechneten Raumladungsgrenzströme jedesmal mit großer Genauigkeit experimentell bestätigt gefunden, wobei, wie noch gezeigt wird, die angewendete Elektrodenanordnung der parallelen Platten sich sehr gut bewährte und Korrekturen, die den Spannungsabfall innerhalb der Kathode sowie die Aufhebung der Thomsionschen Bildkraft berücksichtigen, nicht angebracht zu werden brauchten. Ebenso konnte der Elektrodenabstand für alle wirksamen Oberflächenelemente der Kathode als gleich angenommen und aus drei Ablesungen hinreichend genau bestimmt werden. Als Beispiel für die erzielten Resultate sollen nun hier die Ergebnisse einer Versuchsreihe, die sich auf acht Tage erstreckte und mit der gleichzeitig auch die Wirkung des Wasserstoffs auf die Raumladungerscheinung untersucht wurde, vorgeführt werden. Wie bei allen Versuchsreihen, die mit der neuen Anordnung im extremen Vakuum angestellt wurden, war auch bei dieser bei fortschreitender Entgasung eine ganz bedeutende Steigerung des Effektes zu beobachten. Bei dem vorliegenden Beispiel zeigte die Elektrode, bevor das Versuchsrohr erhitzt worden war, nach etwa zweistündiger Evakuierung einen Sättigungsstrom von  $2,1 \cdot 10^{-5}$  Amp. bei  $1100^{\circ}$  C. Daß dieser Sättigungsstrom aber nicht der wahren Ergiebigkeit der Kathode entsprach, sondern ein durch Restgase stark herabgesetzter Effekt war, zeigte sich, nachdem durch die beschriebene Entgasungsmethode sich der reine, vollkommen konstante Vakuumeffekt eingestellt hatte, bei dem für  $1100^{\circ}$  eine noch bei 400 Volt durch die Raumladung begrenzte Elektronenemission von  $7,7 \cdot 10^{-8}$  Amp. gemessen wurde, der Effekt sich also um das Hundertfache gesteigert hatte. Eine noch beträchtlichere Erhöhung erfuhr die Emission naturgemäß bei den niedrigeren Temperaturen, wie überhaupt hier sich erst zuletzt voll-

Tabelle

Volt	$\alpha = 1,178$ cm	Raum- ladungs- grenzstrom	1300° C	1250° C	1200° C	1150° C
2 {	lg $J$ Amp.	0,677 <sup>-6</sup>	0,477 <sup>-5</sup>	0,398 <sup>-5</sup>	0,301 <sup>-5</sup>	0,176 <sup>-5</sup>
	$J$ Amp.	4,75 · 10 <sup>-6</sup>	3,0 · 10 <sup>-5</sup>	2,5 · 10 <sup>-5</sup>	2,0 · 10 <sup>-5</sup>	1,5 · 10 <sup>-5</sup>
4 {	lg $J$ Amp.	0,128 <sup>-5</sup>	0,643 <sup>-5</sup>	0,591 <sup>-5</sup>	0,477 <sup>-5</sup>	0,398 <sup>-5</sup>
	$J$ Amp.	1,84 · 10 <sup>-5</sup>	4,4 · 10 <sup>-5</sup>	3,9 · 10 <sup>-5</sup>	3,0 · 10 <sup>-5</sup>	2,5 · 10 <sup>-5</sup>
8 {	lg $J$ Amp.	0,580 <sup>-5</sup>	0,881 <sup>-5</sup>	0,833 <sup>-5</sup>	0,763 <sup>-5</sup>	0,699 <sup>-5</sup>
	$J$ Amp.	3,80 · 10 <sup>-5</sup>	7,6 · 10 <sup>-5</sup>	6,8 · 10 <sup>-5</sup>	5,8 · 10 <sup>-5</sup>	5,0 · 10 <sup>-5</sup>
12 {	lg $J$ Amp.	0,844 <sup>-5</sup>	0,041 <sup>-4</sup>	0,009 <sup>-4</sup>	0,954 <sup>-5</sup>	0,903 <sup>-5</sup>
	$J$ Amp.	6,98 · 10 <sup>-5</sup>	1,1 · 10 <sup>-4</sup>	1,02 · 10 <sup>-4</sup>	9,0 · 10 <sup>-5</sup>	8,0 · 10 <sup>-5</sup>
16 {	lg $J$ Amp.	0,081 <sup>-4</sup>	0,176 <sup>-4</sup>	0,146 <sup>-4</sup>	0,093 <sup>-4</sup>	0,037 <sup>-4</sup>
	$J$ Amp.	1,07 · 10 <sup>-4</sup>	1,5 · 10 <sup>-4</sup>	1,4 · 10 <sup>-4</sup>	1,24 · 10 <sup>-4</sup>	1,09 · 10 <sup>-4</sup>
20 {	lg $J$ Amp.	0,177 <sup>-4</sup>	0,279 <sup>-4</sup>	0,265 <sup>-4</sup>	0,210 <sup>-4</sup>	0,164 <sup>-4</sup>
	$J$ Amp.	1,50 · 10 <sup>-4</sup>	1,9 · 10 <sup>-4</sup>	1,84 · 10 <sup>-4</sup>	1,62 · 10 <sup>-4</sup>	1,46 · 10 <sup>-4</sup>
30 {	lg $J$ Amp.	0,441 <sup>-4</sup>	0,518 <sup>-4</sup>	0,491 <sup>-4</sup>	0,447 <sup>-4</sup>	0,415 <sup>-4</sup>
	$J$ Amp.	2,76 · 10 <sup>-4</sup>	3,3 · 10 <sup>-4</sup>	3,1 · 10 <sup>-4</sup>	2,8 · 10 <sup>-4</sup>	2,6 · 10 <sup>-4</sup>
50 {	lg $J$ Amp.	0,733 <sup>-4</sup>	0,826 <sup>-4</sup>	0,799 <sup>-4</sup>	0,763 <sup>-4</sup>	0,720 <sup>-4</sup>
	$J$ Amp.	5,93 · 10 <sup>-4</sup>	6,7 · 10 <sup>-4</sup>	6,3 · 10 <sup>-4</sup>	5,8 · 10 <sup>-4</sup>	5,25 · 10 <sup>-4</sup>
75 {	lg $J$ Amp.	0,098 <sup>-3</sup>	0,064 <sup>-4</sup>	0,041 <sup>-3</sup>	0,000 <sup>-3</sup>	0,964 <sup>-4</sup>
	$J$ Amp.	1,09 · 10 <sup>-3</sup>	1,16 · 10 <sup>-3</sup>	1,1 · 10 <sup>-3</sup>	1,0 · 10 <sup>-3</sup>	9,2 · 10 <sup>-4</sup>
100 {	lg $J$ Amp.	0,225 <sup>-3</sup>	0,255 <sup>-3</sup>	0,230 <sup>-3</sup>	0,190 <sup>-3</sup>	0,149 <sup>-3</sup>
	$J$ Amp.	1,68 · 10 <sup>-3</sup>	1,8 · 10 <sup>-3</sup>	1,7 · 10 <sup>-3</sup>	1,55 · 10 <sup>-3</sup>	1,41 · 10 <sup>-3</sup>
150 {	lg $J$ Amp.	0,489 <sup>-3</sup>	0,518 <sup>-3</sup>	0,477 <sup>-3</sup>	0,447 <sup>-3</sup>	0,401 <sup>-3</sup>
	$J$ Amp.	3,08 · 10 <sup>-3</sup>	3,3 · 10 <sup>-3</sup>	3,0 · 10 <sup>-3</sup>	2,8 · 10 <sup>-3</sup>	2,52 · 10 <sup>-3</sup>
200 {	lg $J$ Amp.	0,677 <sup>-3</sup>	0,690 <sup>-3</sup>	0,667 <sup>-3</sup>	0,628 <sup>-3</sup>	0,580 <sup>-3</sup>
	$J$ Amp.	4,75 · 10 <sup>-3</sup>	4,9 · 10 <sup>-3</sup>	4,85 · 10 <sup>-3</sup>	4,25 · 10 <sup>-3</sup>	3,8 · 10 <sup>-3</sup>
250 {	lg $J$ Amp.	0,822 <sup>-3</sup>	0,826 <sup>-3</sup>	0,806 <sup>-3</sup>	0,763 <sup>-3</sup>	0,708 <sup>-3</sup>
	$J$ Amp.	6,64 · 10 <sup>-3</sup>	6,7 · 10 <sup>-3</sup>	6,4 · 10 <sup>-3</sup>	5,8 · 10 <sup>-3</sup>	5,1 · 10 <sup>-3</sup>
300 {	lg $J$ Amp.	0,941 <sup>-3</sup>	0,944 <sup>-3</sup>	0,924 <sup>-3</sup>	0,869 <sup>-3</sup>	0,813 <sup>-3</sup>
	$J$ Amp.	8,72 · 10 <sup>-3</sup>	8,8 · 10 <sup>-3</sup>	8,4 · 10 <sup>-3</sup>	7,4 · 10 <sup>-3</sup>	6,5 · 10 <sup>-3</sup>
350 {	lg $J$ Amp.	0,041 <sup>-2</sup>	0,045 <sup>-2</sup>	0,013 <sup>-2</sup>	0,968 <sup>-3</sup>	0,903 <sup>-3</sup>
	$J$ Amp.	1,10 · 10 <sup>-2</sup>	1,11 · 10 <sup>-2</sup>	1,03 · 10 <sup>-2</sup>	9,3 · 10 <sup>-3</sup>	8,0 · 10 <sup>-3</sup>
400 {	lg $J$ Amp.	0,128 <sup>-2</sup>	0,124 <sup>-2</sup>	0,097 <sup>-2</sup>	0,049 <sup>-2</sup>	0,978 <sup>-3</sup>
	$J$ Amp.	1,84 · 10 <sup>-2</sup>	1,33 · 10 <sup>-2</sup>	1,25 · 10 <sup>-2</sup>	1,12 · 10 <sup>-2</sup>	9,5 · 10 <sup>-3</sup>

1100° C	1050° C	1000° C	950° C	900° C	850° C	800° C
0,068 <sup>-5</sup> 1,17 · 10 <sup>-5</sup>	0,930 <sup>-6</sup> 8,5 · 10 <sup>-6</sup>	0,699 <sup>-6</sup> 5,0 · 10 <sup>-6</sup>	0,491 <sup>-6</sup> 3,1 · 10 <sup>-6</sup>	0,192 <sup>-6</sup> 1,55 · 10 <sup>-6</sup>	0,539 <sup>-7</sup> 3,46 · 10 <sup>-7</sup>	0,943 <sup>-8</sup> 8,77 · 10 <sup>-8</sup>
0,301 <sup>-5</sup> 2,0 · 10 <sup>-5</sup>	0,176 <sup>-5</sup> 1,5 · 10 <sup>-5</sup>	0,000 <sup>-5</sup> 1,0 · 10 <sup>-5</sup>	0,869 <sup>-6</sup> 7,4 · 10 <sup>-6</sup>	0,599 <sup>-6</sup> 3,97 · 10 <sup>-6</sup>	0,143 <sup>-6</sup> 1,39 · 10 <sup>-6</sup>	0,596 <sup>-7</sup> 3,94 · 10 <sup>-7</sup>
0,602 <sup>-5</sup> 4,0 · 10 <sup>-5</sup>	0,491 <sup>-5</sup> 3,1 · 10 <sup>-5</sup>	0,398 <sup>-5</sup> 2,5 · 10 <sup>-5</sup>	0,279 <sup>-5</sup> 1,9 · 10 <sup>-5</sup>	0,083 <sup>-5</sup> 1,21 · 10 <sup>-5</sup>	0,757 <sup>-6</sup> 5,72 · 10 <sup>-6</sup>	0,238 <sup>-7</sup> 1,73 · 10 <sup>-6</sup>
0,820 <sup>-5</sup> 6,6 · 10 <sup>-5</sup>	0,756 <sup>-5</sup> 5,7 · 10 <sup>-5</sup>	0,681 <sup>-5</sup> 4,8 · 10 <sup>-5</sup>	0,568 <sup>-5</sup> 3,7 · 10 <sup>-5</sup>	0,380 <sup>-5</sup> 2,4 · 10 <sup>-5</sup>	0,100 <sup>-5</sup> 1,26 · 10 <sup>-5</sup>	0,643 <sup>-6</sup> 4,4 · 10 <sup>-6</sup>
0,987 <sup>-5</sup> 9,7 · 10 <sup>-5</sup>	0,930 <sup>-5</sup> 8,5 · 10 <sup>-5</sup>	0,851 <sup>-5</sup> 7,1 · 10 <sup>-5</sup>	0,740 <sup>-5</sup> 5,5 · 10 <sup>-5</sup>	0,572 <sup>-5</sup> 3,73 · 10 <sup>-5</sup>	0,305 <sup>-5</sup> 2,02 · 10 <sup>-5</sup>	0,892 <sup>-6</sup> 7,8 · 10 <sup>-6</sup>
0,127 <sup>-4</sup> 1,34 · 10 <sup>-4</sup>	0,072 <sup>-4</sup> 1,18 · 10 <sup>-4</sup>	0,000 <sup>-4</sup> 1,0 · 10 <sup>-4</sup>	0,903 <sup>-5</sup> 8,0 · 10 <sup>-5</sup>	0,740 <sup>-5</sup> 5,5 · 10 <sup>-5</sup>	0,491 <sup>-5</sup> 3,1 · 10 <sup>-5</sup>	0,093 <sup>-5</sup> 1,24 · 10 <sup>-5</sup>
0,380 <sup>-4</sup> 2,4 · 10 <sup>-4</sup>	0,326 <sup>-4</sup> 2,12 · 10 <sup>-4</sup>	0,267 <sup>-4</sup> 1,85 · 10 <sup>-4</sup>	0,164 <sup>-4</sup> 1,46 · 10 <sup>-4</sup>	0,013 <sup>-4</sup> 1,03 · 10 <sup>-4</sup>	0,782 <sup>-5</sup> 6,05 · 10 <sup>-5</sup>	0,314 <sup>-5</sup> 2,06 · 10 <sup>-5</sup>
0,695 <sup>-4</sup> 4,95 · 10 <sup>-4</sup>	0,653 <sup>-4</sup> 4,5 · 10 <sup>-4</sup>	0,591 <sup>-4</sup> 3,9 · 10 <sup>-4</sup>	0,477 <sup>-4</sup> 3,0 · 10 <sup>-4</sup>	0,322 <sup>-4</sup> 2,1 · 10 <sup>-4</sup>	0,924 <sup>-5</sup> 8,40 · 10 <sup>-5</sup>	0,386 <sup>-5</sup> 2,43 · 10 <sup>-5</sup>
0,929 <sup>-4</sup> 8,5 · 10 <sup>-4</sup>	0,880 <sup>-4</sup> 7,6 · 10 <sup>-4</sup>	0,826 <sup>-4</sup> 6,7 · 10 <sup>-4</sup>	0,699 <sup>-4</sup> 5,0 · 10 <sup>-4</sup>	0,401 <sup>-4</sup> 2,52 · 10 <sup>-4</sup>	0,949 <sup>-5</sup> 8,9 · 10 <sup>-5</sup>	0,398 <sup>-5</sup> 2,50 · 10 <sup>-5</sup>
0,114 <sup>-3</sup> 1,3 · 10 <sup>-3</sup>	0,045 <sup>-3</sup> 1,11 · 10 <sup>-3</sup>	0,987 <sup>-4</sup> 9,7 · 10 <sup>-4</sup>	0,785 <sup>-4</sup> 6,1 · 10 <sup>-4</sup>	0,425 <sup>-4</sup> 2,66 · 10 <sup>-4</sup>	0,949 <sup>-5</sup> 8,90 · 10 <sup>-5</sup>	0,398 <sup>-5</sup> 2,50 · 10 <sup>-5</sup>
0,342 <sup>-3</sup> 2,2 · 10 <sup>-3</sup>	0,279 <sup>-3</sup> 1,9 · 10 <sup>-3</sup>	0,155 <sup>-3</sup> 1,43 · 10 <sup>-3</sup>	0,851 <sup>-4</sup> 7,1 · 10 <sup>-4</sup>	0,447 <sup>-4</sup> 2,80 · 10 <sup>-4</sup>	0,949 <sup>-5</sup> 8,90 · 10 <sup>-5</sup>	0,398 <sup>-5</sup> 2,50 · 10 <sup>-5</sup>
0,505 <sup>-3</sup> 3,2 · 10 <sup>-3</sup>	0,441 <sup>-3</sup> 2,76 · 10 <sup>-3</sup>	0,243 <sup>-3</sup> 1,75 · 10 <sup>-3</sup>	0,880 <sup>-4</sup> 7,6 · 10 <sup>-4</sup>	0,447 <sup>-4</sup> 2,80 · 10 <sup>-4</sup>	0,949 <sup>-5</sup> 8,90 · 10 <sup>-5</sup>	0,398 <sup>-5</sup> 2,50 · 10 <sup>-5</sup>
0,633 <sup>-3</sup> 4,3 · 10 <sup>-3</sup>	0,532 <sup>-3</sup> 3,4 · 10 <sup>-3</sup>	0,297 <sup>-3</sup> 1,9 · 10 <sup>-3</sup>	0,898 <sup>-4</sup> 7,90 · 10 <sup>-4</sup>	0,447 <sup>-4</sup> 2,80 · 10 <sup>-4</sup>	0,949 <sup>-5</sup> 8,90 · 10 <sup>-5</sup>	0,398 <sup>-5</sup> 2,50 · 10 <sup>-5</sup>
0,732 <sup>-3</sup> 5,4 · 10 <sup>-3</sup>	0,602 <sup>-3</sup> 4,0 · 10 <sup>-3</sup>	0,301 <sup>-3</sup> 2,0 · 10 <sup>-3</sup>	0,898 <sup>-4</sup> 7,90 · 10 <sup>-4</sup>	0,447 <sup>-4</sup> 2,80 · 10 <sup>-4</sup>	0,949 <sup>-5</sup> 8,90 · 10 <sup>-5</sup>	0,398 <sup>-5</sup> 2,50 · 10 <sup>-5</sup>
0,813 <sup>-3</sup> 6,5 · 10 <sup>-3</sup>	0,635 <sup>-3</sup> 4,5 · 10 <sup>-3</sup>	0,312 <sup>-3</sup> 2,05 · 10 <sup>-3</sup>	0,898 <sup>-4</sup> 7,90 · 10 <sup>-4</sup>	0,447 <sup>-4</sup> 2,80 · 10 <sup>-4</sup>	0,949 <sup>-5</sup> 8,90 · 10 <sup>-5</sup>	3,398 <sup>-5</sup> 2,50 · 10 <sup>-5</sup>
0,886 <sup>-3</sup> 7,7 · 10 <sup>-3</sup>	0,690 <sup>-3</sup> 4,9 · 10 <sup>-3</sup>	0,312 <sup>-3</sup> 2,05 · 10 <sup>-3</sup>	0,898 <sup>-4</sup> 7,90 · 10 <sup>-4</sup>	0,447 <sup>-4</sup> 2,80 · 10 <sup>-4</sup>	0,949 <sup>-5</sup> 8,90 · 10 <sup>-5</sup>	0,398 <sup>-5</sup> 2,50 · 10 <sup>-5</sup>

kommene Konstanz einstellte. Über den Fortschritt des Reinheitsgrades gibt übrigens auch der Gang des Galvanometers Aufschluß; während die Galvanometerausschläge zuerst den Potentialveränderungen nur sehr langsam folgen, gegen die geringsten Temperaturschwankungen aber sehr empfindlich sind, stellt sich das Galvanometer bei größerem Reinheitsgrad sehr schnell auf die den verschiedenen Spannungen entsprechenden Ausschläge ein und ist gegen Temperaturschwankungen, abgesehen natürlich von den Sättigungsströmen, fast indifferent. In der Tab. 20 sind die Stromwerte des reinen Effektes des CaO im extremen Vakuum eingetragen. Nachdem innerhalb eines Tages bei fortschreitender Entgasung sich der Effekt allmählich gesteigert hatte, wurden diese Stromwerte an drei Tagen vollkommen konstant beobachtet, und es muß mit besonderem Nachdruck darauf hingewiesen werden, daß diese Konstanz ganz unabhängig von der Belastungsdauer der Elektrode aufrecht erhalten blieb. Obwohl bei der Aufnahme dieser in der Tabelle angegebenen Werte die Elektrode jedesmal ca. 2 Stunden belastet wurde, wurde außerdem noch durch eine Dauerbelastung von 3 Stunden mit  $1,38 \cdot 10^{-2}$  Amp. bei 400 Volt und  $1300^{\circ}$  C die Konstanz des Effektes geprüft. Auch nach dieser für die kleine wirksame Oberfläche von ca.  $10 \text{ mm}^2$  außerordentlich starken Belastung zeigten sich sämtliche Stromwerte vollkommen konstant. Ebenso blieb der Effekt unverändert, als das Versuchsrohr in flüssige Luft gesetzt worden war. Es war dies, abgesehen von dem erreichten Vakuum, durchaus zu erwarten, da bei der angewendeten Elektrodenanordnung die Glaswände des Versuchsrohres bei der Belastung nicht heiß wurden und vor allem auch gegen jegliche Aufladung geschützt waren. Um diese Meßresultate nun einer quantitativen Kontrolle zu unterziehen, hat man die erhaltenen Stromwerte in zwei Gruppen zu scheiden, wie dies auch in der Tabelle durch die stark ausgezogenen Trennungslinien angedeutet ist. Die eine Gruppe, der bei der vorliegenden Meßreihe die Mehrzahl der Stromwerte angehört, folgt der Raumladungscharakteristik, d. h. die Ströme nehmen mit der  $3/2$ -Potenz der angelegten Spannungen zu und können theoretisch die in der ersten Spalte der Tabelle verzeichneten, aus dem Elektrodenabstand berechneten Raumladungsgrenzströme nicht überschreiten. Ab-

gesehen von dem Vergleich der Zahlenwerte in der Tabelle gibt die Kurventafel 7 (Tafel IV) ein anschauliches Bild von der erzielten Übereinstimmung. In dieser Tafel sind die Logarithmen der Stromwerte als Ordinaten, die Logarithmen der Spannungen als Abszissen eingetragen. Die ausgezogene Gerade mit dem Richtungsfaktor  $\frac{3}{2}$  stellt die für den verwendeten Elektrodenabstand von 1,178 cm berechneten Raumladungsgrenzströme für die verschiedenen Spannungen dar. Bei diesem Elektrodenabstand schneidet diese Gerade die Ordinate in dem Punkt 0,245. Wie zu ersehen, ist die Annäherung der erzielten Meßresultate an diese Gerade bei einer großen Variation der Kathodentemperatur und der Sättigungsströme vollkommen erreicht. Abgesehen davon, daß die absoluten Beträge der Stromwerte den theoretisch erbrachten entsprechen, zeigt sich auch die Raumladungscharakteristik bestätigt. Bei der beobachteten großen Wirksamkeit des CaO wird in dem vorliegenden Fall schon der Sättigungsstrom bei  $1050^{\circ}$  C durch die Raumladungswirkung bis 400 Volt begrenzt. Leider stand zur Zeit der Untersuchung keine höhere Spannung zur Verfügung, um diese Verhältnisse weiter hinauf zu verfolgen zu können. Wie aus dem Kurvenbild zu ersehen, tritt bei den niedrigeren Spannungen von ungefähr 2—30 Volt eine Überschreitung der betreffenden Raumladungsgrenzströme auf. Auf die theoretische Begründung hierfür, die von W. Schottky<sup>1)</sup> gegeben wurde, näher einzugehen, liegt jedoch außerhalb des Problems der vorliegenden Untersuchung. Aus den gewonnenen Versuchswerten würden jedoch wohl deshalb in dieser Hinsicht keine eindeutigen Schlüsse zu ziehen sein, da der bei ebenen Elektroden nicht unbeträchtliche Einfluß der Anfangsgeschwindigkeiten und damit das Feld des Heizstromes zu berücksichtigen wäre. Besonders erheblich müssen aus denselben Gründen auch solche Abweichungen bei den ganz niedrigen Temperaturen von  $800^{\circ}$  und  $850^{\circ}$  C werden, wie sich dies auch bei dem vorliegenden Beispiel zeigt. Immerhin erscheint es nicht unmöglich, gerade aus der rechnerischen Kontrolle dieser Abweichungen bei den der Grenze der Wirksamkeit des CaO sehr nahe liegenden Temperaturen einige Aufklärungen über die den Elektronenstrom einleitenden Vorgänge auf der Kathode zu

1) W. Schottky, Physik. Zeitschr. 15. p. 624. 1915.

erhalten. Aus der innerhalb eines großen Temperatur- und Spannungsintervalls ohne jegliche Korrektion erzielten Übereinstimmung bei  $900-1300^{\circ}\text{C}$  geht jedoch auch hervor, daß die angewendete Elektrodenanordnung der ebenen Platten wohl einige Vorteile gegenüber der zylindrischen Elektrodenanordnung besitzt. Abgesehen von der Temperaturmessung, die bei einer zylindrischen Anordnung, wenn man eine Störung des elektrischen Feldes vermeiden will, nur durch Widerstandsmessung erfolgen kann, bietet auch die Ausmittlung des ziemlich variierenden Elektrodenabstandes eine bedeutende Schwierigkeit. Außerdem kann man den Spannungsabfall innerhalb des Glühdrahtes nicht unberücksichtigt lassen und muß sowohl in der Raumladungsgleichung wie bei der Bestimmung der Sättigungsströme den Radius des Glühdrahtes in Rechnung ziehen.<sup>1)</sup> Bei dem vorliegenden Beispiel, bei dem, wie gezeigt, bis zu der Glühtemperatur von  $1000^{\circ}\text{C}$  der Sättigungsstrom unterhalb des Raumladungsgrenzstromes lag, wurde die Sättigungscharakteristik bis 400 Volt erzielt, ohne die von dem Krümmungsmaß der Kathode abhängende Aufhebung der Thomsenschen Bildkraft zu berücksichtigen, während bei der Verwendung eines Glühdrahtes, besonders bei den niedrigeren Temperaturen, diese Korrektion unbedingt hätte angebracht werden müssen. Bei dem vorliegenden Beispiel, das die Raumladungerscheinung in so ausgeprägter Weise zeigt, mußte sich naturgemäß die Bestimmung der Richardsonschen Konstanten auf die niedrigeren Glühtemperaturen beschränken. Wie bereits aus der oben gegebenen Darlegung des Kriteriums für den erreichten Reinheitsgrad hervorgeht, liegt in dieser Beschränkung jedoch keineswegs eine Beeinträchtigung der Gültigkeit dieser bei den niedrigeren Temperaturen bestimmten Richardsonschen Konstanten. Die Nachprüfung der Richardsonschen Gesetzmäßigkeit gerade bei den niedrigeren Temperaturen ergibt, wie gesagt, ein sicheres Urteil über den erreichten Reinheitsgrad, und die dabei berechneten Konstanten entsprechen am ehesten den erreichten Vakuumbedingungen, da gerade hier die Elektronenemission am empfindlichsten gegen etwa noch vorhandene Störungen ist. Die Sättigungsströme, also die Elektronenströme, die der Richardsonschen Gesetzmäßigkeit

1) W. Schottky, Phys. Zeitschr. 15. p. 872. 1914.

keit folgen, bilden die zweite Gruppe der in der Tabelle verzeichneten Stromwerte. Die aus diesen Werten ermittelten Konstanten der Richardsonschen Gleichung sind in Tab. 21 verzeichnet, wobei für die auf Elektronen bezogene Gaskonstante  $R = 1,34 \cdot 10^{-16}$  Erg/Grad und für die Ladung des Elektrons  $e = 4,67 \cdot 10^{-10}$  e. s. e. gesetzt wurde.  $\varphi$  bedeutet die Austrittsarbeit in Erg, während  $\delta\varepsilon$  die Potentialdifferenz in Volt ist, die dieser Arbeit entspricht.

Da, wie gezeigt, bei dem vorliegenden Beispiel der Sättigungsstrom bei  $1050^{\circ}$  C infolge der Raumladungswirkung bei 400 Volt nicht mehr erreicht wurde und keine höhere Spannung zur Verfügung stand, konnten in diesem Fall die Richardsonschen Konstanten nur aus den fünf in der Tabelle verzeichneten Sättigungsstromwerten bei  $800-1000^{\circ}$  C ermittelt werden. Gleichzeitig mit der außerordentlichen Steigerung der Emissionsfähigkeit des CaO bei fortschreitendem Reinheitsgrad waren die Konstanten der Richardsonschen Gleichung allmählich gesunken und hatten sich auf die in der Tabelle verzeichneten konstanten Endwerte eingestellt, und zwar wurde, wie erwähnt, zuletzt bei den ganz niedrigen Temperaturen diese Konstanz und damit zugleich die Einordnung unter das Richardsonsche Gesetz erzielt. Wie aus der Tabelle zu ersehen, sind die innerhalb der verschiedenen Temperaturintervallen auftretenden Schwankungen der Konstanten, vor allem der Werte für  $A$ , gering, und die Übereinstimmung mit dem Richardsonschen Gesetz ist praktisch erreicht. In Kurventafel 8 ist die Richardsonsche Gerade eingetragen und das durch die Raumladungswirkung bedingte Abbiegen der Werte von dieser Geraden zu dem Raumladungsgrenzstrom hin zu ersehen. In der letzten Spalte der Tabelle sind unter Einsetzung der aus den ersten fünf Stromwerten berechneten Mittelwerte für  $A$  und  $B$  rückwärts die zu beobachtenden Elektronenströme angegeben. Der Stromwert bei  $1050^{\circ}$  C wurde nicht mitberücksichtigt, da, wie auch aus der Kurventafel ersichtlich, bei dieser Temperatur und bei 400 Volt der Strom durch die Raumladung bereits herabgedrückt ist. Über den absoluten Betrag dieser Mittelwerte ist zu sagen, daß sie weit unterhalb der bisher hierfür gefundenen Werte liegen. Abgesehen von dem experimentellen Ergebnis mehrerer Versuchsreihen mit verschiedenen

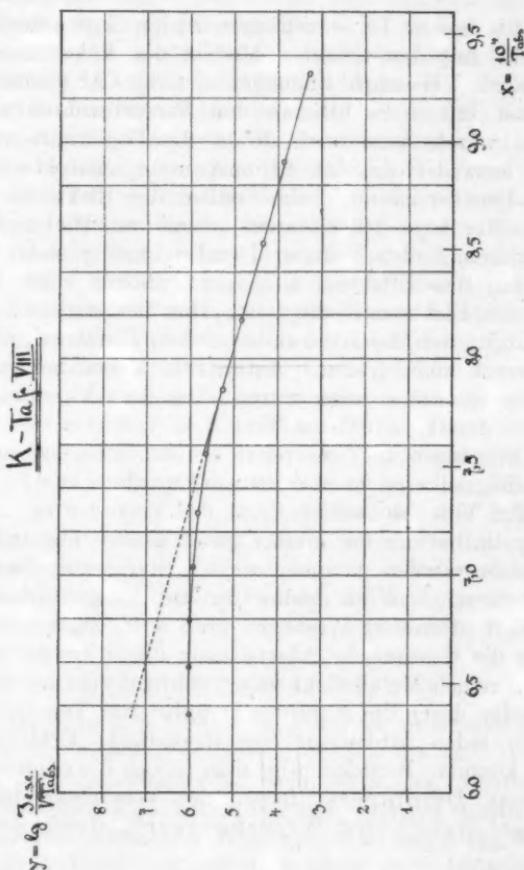
Tabelle 21.

Temp.	$x = \frac{1}{T_{\text{abs}}}$	$\frac{1}{J_{\text{abs}}}$	$\frac{1}{J_{\text{Amp. beob.}}}$	$J e \cdot g \cdot e$ beob.	$y$	$b$	$B$	$\psi$	$\delta_e$	$a$	$A$	$J$ Amp. ber.
800° C	9,3196 · 10 <sup>-4</sup>	2,50 · 10 <sup>-5</sup>	7,50 · 10 <sup>4</sup>	3,35976	13063	30080	4,090 · 10 <sup>-12</sup>	2,589 Volt	15,65716	3,4447 · 10 <sup>15</sup>	<b>2,55 · 10<sup>-5</sup></b>	
850° C	8,9050 · 10 <sup>-4</sup>	8,90 · 10 <sup>-5</sup>	2,67 · 10 <sup>5</sup>	3,90132	12853	29065	3,967 · 10 <sup>-12</sup>	2,548 "	15,38032	2,2403 · 10 <sup>15</sup>	<b>8,84 · 10<sup>-5</sup></b>	
900° C	8,5252 · 10 <sup>-4</sup>	2,80 · 10 <sup>-4</sup>	8,40 · 10 <sup>5</sup>	4,38963	12662	29155	3,907 · 10 <sup>-12</sup>	2,509 "	15,18263	1,5263 · 10 <sup>15</sup>	<b>2,77 · 10<sup>-4</sup></b>	
950° C	8,1766 · 10 <sup>-4</sup>	7,90 · 10 <sup>-4</sup>	2,37 · 10 <sup>6</sup>	4,83103	12622	29063	3,894 · 10 <sup>-12</sup>	2,501 "	15,15103	1,4159 · 10 <sup>15</sup>	<b>7,89 · 10<sup>-4</sup></b>	
1000° C	7,8554 · 10 <sup>-4</sup>	2,05 · 10 <sup>-3</sup>	6,15 · 10 <sup>6</sup>	5,23647	12468	28710	3,847 · 10 <sup>-12</sup>	2,471 "	15,03110	10,744 · 10 <sup>15</sup>	<b>2,07 · 10<sup>-3</sup></b>	
1050° C	7,8655 · 10 <sup>-4</sup>	4,90 · 10 <sup>-3</sup>	1,47 · 10 <sup>6</sup>	5,60654							<b>5,07 · 10<sup>-3</sup></b>	

$$\mathbf{A} = \frac{1,9836 \cdot 10^{15}}{\text{Mittelwert}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{29476}{\text{Mittelwert}}$$

CaO-Elektroden, welches immer wieder dieselbe Größenordnung dieser Konstanten bestätigte, wie dies auch die oben angegebenen Werte bei dem Übergangsstadium des Vakuums



zeigen, wurde aber auch diese Herabsetzung der Konstanten aus theoretischen Betrachtungen heraus schon immer erwartet. Für diese Konstante  $\delta_e$  liegen bisher für die CaO-Elektrode folgende vier Beobachtungen vor:

(1904) Wehnelt <sup>1)</sup>	= 3,69	Volt,
(1908) Deininger <sup>2)</sup>	= 3,76	„ „
(1908) Jentzsch <sup>3)</sup>	= 3,48	„ „
(1912) Schneider <sup>4)</sup>	= 3,45	„ „

Bei allen diesen Untersuchungen waren nun jedoch keineswegs die mit den neuesten Mitteln der Vakuumtechnik erreichbaren Versuchsbedingungen erzielt. Abgesehen davon, daß fast immer Schlitte an den Versuchsrohren verwendet worden waren, wird auch direkt die Gegenwart von Restgasen entweder an der Stromspannungscharakteristik oder durch Drucksteigerung beim Glühen der Elektrode bemerkt. Gleichzeitig wird jedoch auch schon von Wehnelt darauf hingewiesen, daß mit dieser Drucksteigerung stets eine Verringerung des Effektes, also eine Erhöhung der Austrittsarbeit des Elektrons bedingt ist. Dies bestätigt sich auch bei den Konstanten der Richardsonschen Gleichung, die in dem Vorversuch und bei den quantitativen Messungen im Wasserstoff beobachtet worden waren. Bei dem Vorversuch ergab sich für  $A = 1,5 \cdot 10^{16}$  für  $\delta \varepsilon = 3,45$  Volt, bei den quantitativen Messungen im Wasserstoff, bei denen bereits ein höherer Reinheitsgrad erreicht worden war, wurde  $A = 6,5 \cdot 10^{15}$  und  $\delta \varepsilon = 3,2$  Volt beobachtet. Auf die Veränderung der Werte für  $A$ , die bei der fast immer gleich großen Oxydschicht gut verglichen werden können, wird weiter unten noch näher eingegangen. Daß die bisher für die Austrittsarbeit experimentell bestimmten Werte zu groß sind, legte, wie gesagt, bereits die theoretische Abschätzung dieser Größe wenigstens für den reinen Metalleffekt nahe, während man bei den Oxydelektroden durch die Annahme komplizierter Vorgänge schließlich für jeden Zahlenwert eine theoretische Erklärung hätte geben können. Berücksichtigt man jedoch die oben erwähnten Resultate Deiningers, ferner die Versuchsergebnisse von Königsberger<sup>5)</sup> und Weißenberger<sup>6)</sup>, durch welche die

1) A. Wehnelt, *l. c.*

2) F. Deininger, *l. c.*

3) F. Jentzsch, *l. c.*

4) Fr. Schneider, *Ann. d. Phys.* **37**, p. 569. 1912.

5) J. Königsberger, *Jahrb. d. Radiol. u. Elektron.* **4**, p. 158. 1907.

6) A. Weißenberger, *Physik. Zeitschr.* **15**, p. 105. 1914.

metallische Leitfähigkeit der Metalloxyde endgültig bestätigt ist, so wird man auch bei der Elektronenemission der Metalloxyde keine anderen Annahmen für die Austrittsarbeit des Elektrons zu machen haben wie bei dem Effekt des reinen Metalls, besonders auch, wenn man die Resultate der vorliegenden Untersuchung berücksichtigt. Es sind also bei der Berechnung der Austrittsarbeit des Elektrons, wenn man von einer elektrischen Doppelschicht an der Grenze Metall-Vakuum absieht, auch für die Elektronenemission des CaO lediglich zwei physikalische Vorgänge zu berücksichtigen: 1. Eine spezifische Anziehung zwischen Leiter und Elektron, 2. die Wirkung der „Thomsonschen Bildkraft“. Unter diesen Voraussetzungen ist also die zu leistende Arbeit des Elektrons rein elektrischer Natur. Der erste Teil der Austrittsarbeit ist gleich zu setzen der Energie, die zur Bewegung eines Elektrons aus dem Innern eines vollkommen sphärischen Leiters von molekularer Dimension erforderlich ist.<sup>1)</sup> Diese Energie beträgt  $\varepsilon^2/2\varsigma$ , wenn  $\varepsilon$  die Ladung und  $\varsigma$  der Atomradius der emittierenden Substanz, oder besser gesagt, der für die Wirkungssphäre des Kraftfeldes des betreffenden Atoms spezifische Parameter ist. Nimmt man ferner mit Debye<sup>2)</sup> an, daß die Wirkungssphäre der Thomsonschen Bildkraft für jede Substanz sich bis zu demselben für die Substanz spezifischen Parameter erstreckt, so ergibt sich für den zweiten Teil der Austrittsarbeit  $\varepsilon^2/4\varsigma$ , also eine von derselben Materialkonstanten abhängige Größe. Für den vorliegenden Fall war es nun interessant, den sehr niedrig gefundenen Wert der Austrittsarbeit:

$$\psi = 3,95 \cdot 10^{-12} \text{ Erg/Grad} = 2,54 \text{ Volt}$$

auf diese theoretischen Erwägungen hin zu untersuchen, besonders da die bisher gewonnenen Größen die theoretischen Werte bis 50 Proz. übertrafen, wenn auch eine Annäherung nicht zu erkennen war. Um zunächst den für die emittierende Substanz charakteristischen Wert von  $\varsigma$  zu ermitteln, wurde der gefundene Wert von der oben theoretisch hergeleiteten Austrittsarbeit gleichgesetzt und aus der Relation:

$$\frac{3}{4} \frac{\varepsilon^2}{\varsigma} = \psi$$

1) O. W. Richardson, Jahrb. d. Radiol. u. Elektron. **1**, p. 300. 1904.

2) P. Debye, Ann. d. Phys. **33**, p. 441. 1910.

die Größe  $\varsigma$  bestimmt. Hierbei ergibt sich in Übereinstimmung mit der erwarteten Größe für  $\varsigma = 4,14 \cdot 10^{-8}$  cm. Diese Übereinstimmung ist als vollkommen erreicht anzusehen, besonders da die wegen der teilweisen Aufhebung der Thomsonschen Bildkraft durch den angelegten Potentialgradient im vorliegenden Fall zwar kleine Korrekturen nicht angebracht sind. Es ist also auch hierdurch der Beweis der größeren Berechtigung des gefundenen niedrigen Wertes für die Austrittsarbeit des Elektrons erbracht. In diesem Fall ist also schon durch die experimentelle Bestätigung des theoretisch erwarteten Wertes für diese rein elektrische Natur angenommene Austrittsarbeit die Gültigkeit der Voraussetzungen der Elektronentheorie für den Thermoionenstrom des CaO erwiesen, während sonst natürlich diese Konstante  $\psi$  keinen Rückschluß für den Emissionsmechanismus an sich zuläßt. Hierüber gibt vielmehr die Konstante  $A$  Aufschluß, die für den Ausdruck

$$n \varepsilon \sqrt{\frac{R}{2 \pi m}}$$

eingesetzt worden war, also die für die emittierende Substanz charakteristische Anzahl  $n$  der „freien“ Elektronen im Kubikzentimeter enthält. Jedoch auch die bisher hierfür gefundenen Werte entsprachen in keiner Weise den theoretisch erwarteten, und zwar überstiegen die gefundenen Größen diese um das  $10^3$ – $10^8$  fache. Diese Abweichung wurde einerseits auf die nur ungenaue Bestimmbarkeit oder eine Abhängigkeit der Konstanten  $A$  von der Temperatur geschoben, andererseits war jedoch auch die schon von Wehnelt gegebene Erklärung zu berücksichtigen, der diese starken Abweichungen auf Stoßionisationswirkungen, also auf die Gegenwart von Restgasen höheren Druckes zurückführte. Daß jedenfalls eine ungenaue Bestimmung der Größe der emittierenden Fläche diese Diskrepanz nicht herbeiführen kann, ist wohl sicher; denn bei Abweichungen um mehrere Zehnerpotenzen kommt eine Variation von  $A$  um ungefähr das Zwanzigfache nicht in Betracht. Bei dem vorliegenden Beispiel wurde für  $A$  der Mittelwert von rund  $2 \cdot 10^{15}$  gefunden. Bei einer wirksamen Oberfläche von ungefähr  $0,1 \text{ cm}^2$  ergibt sich für  $A = 2 \cdot 10^{16}$ . Ein Vergleich mit den Werten von  $A$ , die bei dem Vorversuch und bei den quantitativen Messungen im Wasserstoff beob-

achtet wurden, zeigt, daß von den Vakuumbedingungen an, die bei den vorliegenden Untersuchungen schon bei dem Vorversuch erreicht waren, die Konstante  $A$  bei fortschreitendem Reinheitsgrad praktisch unverändert bleibt. Wie schon von Wehnelt vermutet, gehören also wohl schon meßbare Drucke dazu, um die Konstante  $A$  wesentlich gefälscht, d. h. erhöht erscheinen zu lassen. Der Wert für  $n$  berechnete sich aus der oben angegebenen Relation:

$$A = n \epsilon \sqrt{\frac{R}{2\pi m}} = n \cdot 7,153 \cdot 10^{-5}.$$

Hieraus ergibt sich für  $n = 2,80 \cdot 10^{20}$ . Analog dem Photoeffekt, besonders aber bei Berücksichtigung des Emissionsvermögens des CaO bei Potentialgradient  $O$ , sowie seines rein metallischen Leitvermögens liegt es nahe, diese Zahl  $n$  mit der Anzahl der Moleküle im Kubikzentimeter zu vergleichen. Durch den oben gegebenen Ansatz für die Austrittsarbeit des Elektrons hatte sich für den Radius der Wirkungssphäre des CaO-Moleküls  $4,14 \cdot 10^{-8}$  cm ergeben. Dies entspricht einem Molekülvolumen von  $2,97 \cdot 10^{-22}$  cm, woraus für die Anzahl der Moleküle im Kubikzentimeter sich  $3,36 \cdot 10^{21}$  ergibt, also ein Wert, der vollkommen dem aus der Größe  $A$  ermittelten entspricht, da eine Abweichung um eine Zehnerpotenz noch innerhalb der Fehlergrenze liegt. Betrachtet man also den oben gefundenen Wert als die Anzahl der „freien“ Elektronen des metallischen Leitvermögens, so ermöglicht die Kenntnis dieser Zahl eine Abschätzung des elektrischen Leitvermögens der emittierenden Substanz selbst. Unter Zugrundelegung der Elektronentheorie erhält man für die elektrische Leitfähigkeit als Stromdichte bei der elektrischen Kraft Eins:

$$K = \frac{1}{2} \frac{n e^2 l}{m v}.$$

Setzt man in dieser Relation für die mittlere Geschwindigkeit  $v$  des Elektrons den für das in Frage kommende Temperaturintervall angenäherten Mittelwert  $2,4 \cdot 10^7$  cm/seo<sup>-1</sup> und für die freie Weglänge  $l$  des Elektrons den für dasselbe Temperaturintervall oben berechneten Mittelwert des Radius der Wirkungssphäre des CaO-Moleküls, so ergibt sich nach Elimination von  $m$  durch die bekannte Beziehung:

$$\frac{m}{2} v^2 = \alpha T \quad (\alpha = \frac{3}{2} K = 2,01 \cdot 10^{-16} \text{ Erg./Grad})$$

für die mittlere Leitfähigkeit des CaO bei 1400° C:

$$K = \frac{n e^2 \cdot v \cdot l}{4 \pi T} = \frac{2,8 \cdot 10^{30} \cdot 1,565 \cdot 10^{-40} \cdot 2,4 \cdot 10^7 \cdot 4,14 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 2,01 \cdot 10^{-10} \cdot 1,273 \cdot 10^3} = 6,66 \cdot 10^{-8} \text{ C.G.S.}$$

Dieser Wert ist tatsächlich von der gleichen Größenordnung wie die bisher für die Metalloxyde direkt bestimmten Leitfähigkeiten (vgl. Königsberger, I. c.). Es erscheint also unter den gemachten Annahmen die Theorie experimentell gestützt, daß die für die metallische Leitfähigkeit und das Emissionsvermögen einer metallisch leitenden Substanz charakteristischen Konstanten wesensgleich sind, ohne jedoch zunächst über die Temperaturfunktion von  $n$  und  $l$  eine Aufklärung geben zu können, da selbst die für die Oxyde zu erwartende Variation von  $n$  innerhalb der Fehlergrenze liegt, außer bei dem der Grenze der Wirksamkeit sehr nahe liegenden niedrigen Temperaturintervall. Aus einer näheren Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der bedeutend genauer bestimmbarer Austrittsarbeit erscheint es jedoch bei exakten Versuchsbedingungen möglich, einen Aufschluß über die Temperaturfunktion von  $l$  zu erhalten, wobei jedoch zu berücksichtigen wäre, daß die Variation der Voltadifferenz zwischen der heißen und kalten Elektrode vielleicht von gleicher Größenordnung ist. Bei dem Effekt des reinen Metalles bietet sich insofern ein Vorteil, als man versuchsweise  $n$  als konstant annehmen und außerdem das Temperaturintervall für die Bestimmung der Austrittsarbeit sehr ausdehnen kann. Aus den obigen Resultaten geht ferner auch hervor, daß bei den Oxydelektroden trotz der elektrischen Heizmethode die der Temperatur entsprechende Elektronenbewegung im Oxyd und damit der rein thermische Charakter des Emissionsvorganges wohl vollkommen aufrecht erhalten bleibt. Bei der Nebeneinanderschaltung der dünnen Oxydschicht mit der gut leitenden Platinunterlage ist der Anteil des Heizstromes, der auch beim Maximum der Leitfähigkeit des CaO durch die Oxydschicht fließt, verschwindend klein gegen den emittierten Elektronenstrom. Es kann daher angenommen werden, daß für die Elektronenemission einer Oxydelektrode praktisch alle bei der bestimmten Temperatur freien Leitungselektronen zur Verfügung stehen. Infolge ihrer Wärmebewegung werden sie frei (vgl. Stark: Prinzipien der Atomdynamik, p. 185), überwinden das Kraftfeld des positiven Atomrestes und verdampfen

mit einem von der Temperatur abhängenden Überschuß an kinetischer Energie in das Vakuum. Infolge des zwischen Kathode und Anode aufrecht erhaltenen Potentialabfalls wird die Begrenzung des Sättigungsstromes durch die Raumladung aufgehoben, und nur auf diese Weise kann die ganze Anzahl der bei der bestimmten Kathodentemperatur emittierten Elektronen zur Anode gelangen. Es ist daher noch kurz auf den schon oben erwähnten „idealen Sättigungsstrom“ bei beschleunigenden Potential Null einzugehen. Auch bei der CaO-Elektrode war bei dem vorliegenden Beispiel bei Kurzschluß des Stromkreises ein Strom von ungefähr  $1 \cdot 10^{-5}$  Amp. bei  $1300^{\circ}$  C zu beobachten. Abgesehen davon, daß bei der angewendeten Versuchsmethode der Spannungsabfall auf der Kathode für die Anfangsgeschwindigkeiten der Elektronen hier in Rechnung zu ziehen wäre, käme aber auch bei rein thermischem Betrieb des Glühelementes (vgl. Schlichter<sup>1)</sup>) in einem von positiven Ionen freien Vakuum dieser „ideale Sättigungsstrom“ für die Bestimmung der Richardsonschen Konstanten nicht in Betracht; denn in einem von positiven Ionen freien Vakuum, das an sich die Grundbedingung für den wahren Richardsonschen Effekt ist, ist der beim Potential Null übergehende Strom kein Sättigungsstrom, sondern ein Raumladungsgrenzstrom, der allein durch die Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen, also nur in dieser Hinsicht durch die Temperatur der Kathode bestimmt wird. Erst dadurch, daß man durch ein beschleunigendes Potential die Begrenzung des Stromes durch die Raumladung aufhebt, ist es in einem extremen Vakuum überhaupt möglich, einen Sättigungsstrom und damit die Richardsonschen Konstanten zu beobachten. Um bei dem Potential Null den der Temperatur entsprechenden Sättigungsstrom erhalten zu können, müßte man durch Einleitung eines Gases oder Dampfes die Raumladungswirkung aufheben, wobei jedoch einerseits zu berücksichtigen wäre, daß die Ionisationsspannung dieses Gases der Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen entsprechen müßte, andererseits es aber auch wohl kaum möglich ist, dieses Gas oder diesen Dampf in einer für den Richardsonschen Effekt genügenden Reinheit darzustellen. Übrigens scheint auch eine weitere Veränderung der Aus-

1) W. Schlichter, Ann. d. Phys. 47. p. 573. 1915.

trittsarbeit durch das beschleunigende Potential außer der rechnerisch kontrollierbaren Aufhebung der Thomsonschen Bildkraft innerhalb der Fehlergrenze der Versuchsmethode zu liegen. Träte eine wesentliche Veränderung dieser im Exponenten stehenden Größe dadurch ein, so wäre es nicht möglich, von 75—400 Volt einen vom Potential praktisch unabhängigen Sättigungsstrom zu beobachten, wie sich dies in Kurventafel 7 für 800° C zeigt. Viel eher erscheint der Vorgang an der Anode bei großen beschleunigenden Feldern berücksichtigt werden zu müssen.

#### VI. Die Wirkung des Wasserstoffs auf den Raumladungsgrenzstrom.

Es war nun noch von Interesse, die Wirkung des Wasserstoffs auf den Raumladungsgrenzstrom zu untersuchen, sowie die Elektronenemission der CaO-Elektrode in diesem Gase unter den exakteren Bedingungen nachzuprüfen. Schon die oben beschriebenen quantitativen Messungen im Wasserstoff hatten gezeigt, daß unterhalb der Ionisationsspannung des Wasserstoffs die Raumladungswirkung verstärkt, also eine geringe Verkleinerung des Elektronenstromes herbeigeführt wird. Für die Spannungen oberhalb der Ionisationsspannung war nun zu erwarten, daß die im vorliegenden Fall sehr ausgeprägte Raumladungswirkung schon durch einen sehr geringen Wasserstoffdruck aufgehoben werden würde, der Strom also von den vorher begrenzten Werten oberhalb der Ionisationsspannung des Wasserstoffs plötzlich auf die Sättigungsstromwerte ansteigen würde. Es wurde daher in das Versuchsröhr Wasserstoff bis  $5 \cdot 10^{-3}$  mm Druck eingeleitet. Wie aus Tab. 22 ersichtlich, trat die erwartete Wirkung ein. Bei den Spannungen unterhalb der Ionisationsspannung war der Strom praktisch unverändert, sprang jedoch bei Erhöhung des Potentials sofort auf sehr hohe Werte, bei den größeren Stromdichten unter gleichzeitigem Auftreten der leuchtenden Entladung. Ob dieser bei den hohen Temperaturen etwas höher als die bisher bestimmte Ionisationsspannung liegende Potentialgradient die wahre, diesem größeren Reinheitsgrad entsprechende Ionisationsspannung ist, konnte aus den Stromzunahmen nicht nachgeprüft werden. Bei den Messungen unter Druckvariation, die zur Prüfung der Townsendschen

Gleichung angestellt wurden, stellte es sich nämlich heraus, daß die vollkommene Aufhebung der Raumladungswirkung nicht sprunghaft einsetzt, sondern stark von der Größe des Sättigungsstromes und dem Wasserstoffdruck abhängig ist. Obwohl für jede Spannung ein Maximum der Vergrößerung festgestellt werden konnte, war es daher dennoch nicht möglich, aus dieser Vergrößerung die Ionisationsspannung zu bestimmen. Da jedoch die Maxima der Vergrößerung sich bei dem nach dem Stoletowschen Gesetz berechneten Maximaldrucken einstellten, war erwiesen, daß auch unter diesen exakten Versuchsbedingungen die oben benutzte Stoletowsche Konstante und die Voraussetzung der Townsendschen Gleichung Gültigkeit behalten. Da, wie gesagt, die Aufhebung der Raumladungswirkung sehr stark vom Druck abhängt, wird man auch deshalb die oben benutzte Ionisationsspannung beibehalten. Bei den niedrigen Temperaturen zeigen die in Tab. 22 angegebenen Stromwerte ja auch schon von 12 Volt an eine Zunahme, also eine teilweise Aufhebung der Raumladungsbegrenzung. Nachdem die Wehneltelkrode ca. 2 Stunden bei Druckvariation belastet worden war, wurde der Wasserstoff wieder abgepumpt. Nachdem hierdurch nach einigen Stunden wieder ziemlich extremes Vakuum hergestellt worden war, wurde am nächsten Tage ein unveränderter Vakuumeffekt gemessen, abgesehen natürlich von kleinen Überschreitungen des Raumladungsgrenzstromes. Wie besonders zu bemerken, zeigte bei Abbruch

## Tabelle 22.

Volt	1300°	1250°	1200°	1150°	1100°	1050°	1000°	950°	900°	850°	800°
2	2.5, 10 <sup>-3</sup>	2.0, 10 <sup>-5</sup>	2.0, 10 <sup>-5</sup>	1.9, 10 <sup>-5</sup>	1.1, 10 <sup>-5</sup>	0.9, 10 <sup>-5</sup>	6.0, 10 <sup>-6</sup>	4.1, 10 <sup>-6</sup>	2.3, 10 <sup>-6</sup>	5.0, 10 <sup>-7</sup>	9.0, 10 <sup>-8</sup>
4	4.0, 10 <sup>-3</sup>	3.0, 10 <sup>-5</sup>	3.0, 10 <sup>-5</sup>	2.5, 10 <sup>-5</sup>	2.1, 10 <sup>-5</sup>	1.4, 10 <sup>-5</sup>	9.0, 10 <sup>-6</sup>	6.0, 10 <sup>-6</sup>	3.0, 10 <sup>-6</sup>	9.0, 10 <sup>-7</sup>	2.5, 10 <sup>-7</sup>
8	7.0, 10 <sup>-5</sup>	6.0, 10 <sup>-5</sup>	5.5, 10 <sup>-5</sup>	5.0, 10 <sup>-5</sup>	4.2, 10 <sup>-5</sup>	3.0, 10 <sup>-5</sup>	2.0, 10 <sup>-5</sup>	1.4, 10 <sup>-5</sup>	1.1, 10 <sup>-5</sup>	4.0, 10 <sup>-6</sup>	1.0, 10 <sup>-6</sup>
12	1.1, 10 <sup>-4</sup>	1.0, 10 <sup>-4</sup>	8.5, 10 <sup>-5</sup>	7.5, 10 <sup>-5</sup>	6.9, 10 <sup>-5</sup>	5.0, 10 <sup>-5</sup>	4.0, 10 <sup>-5</sup>	3.0, 10 <sup>-5</sup>	2.0, 10 <sup>-5</sup>	1.1, 10 <sup>-5</sup>	5.4, 10 <sup>-6</sup>
16	1.4, 10 <sup>-4</sup>	1.3, 10 <sup>-4</sup>	1.2, 10 <sup>-4</sup>	1.1, 10 <sup>-5</sup>	9.5, 10 <sup>-5</sup>	8.1, 10 <sup>-5</sup>	7.1, 10 <sup>-5</sup>	6.1, 10 <sup>-5</sup>	4.0, 10 <sup>-5</sup>	2.1, 10 <sup>-5</sup>	9.1, 10 <sup>-6</sup>
20	1.8, 10 <sup>-4</sup>	1.7, 10 <sup>-4</sup>	1.6, 10 <sup>-4</sup>	1.5, 10 <sup>-5</sup>	1.3, 10 <sup>-5</sup>	1.1, 10 <sup>-5</sup>	9.8, 10 <sup>-6</sup>	8.1, 10 <sup>-6</sup>	6.1, 10 <sup>-6</sup>	3.0, 10 <sup>-6</sup>	9.1, 10 <sup>-6</sup>

des Versuches nach einer achttägigen Versuchsdauer die O ydschicht ein vollkommen unverändertes rein weißes Aussehen.

#### Zusammenfassung.

Unter verbesserten Versuchsbedingungen werden die bisher gewonnenen Resultate über das Verhalten der Wehnelt-elektrode in verschiedenen *Gasen* nachgeprüft. Hierbei stellt sich heraus, daß weder das emittierende Calciumoxyd selbst, noch sein spezifisches Emissionsvermögen durch Stickstoff, Wasserstoff und Sauerstoff verändert wird. Gleichzeitig gelingt es, einen konstanten Vakuumeffekt zu erzielen, so daß quantitative Messungen auf Grund der Townsendschen Theorie im Wasserstoff angestellt werden können. Da der Ionisierungsvorgang in diesem Gase den Townsendschen Grundannahmen ziemlich nahe steht, wird innerhalb des benutzten Druckintervall es eine verhältnismäßig gute Übereinstimmung erzielt. Nachdem durch Messungen im Sauerstoff die Ursache der anormalen Resultate der bisherigen Untersuchungen mit der CaO-Elektrode in Gasen erkannt und durch ausgedehnte quantitative Messungen im Wasserstoff die Indifferenz des emittierenden CaO gegen ionisierten Wasserstoff nachgewiesen ist, erscheint die Emissionstheorie des CaO auf elektrochemischer Basis unzutreffend. Die Ergebnisse der quantitativen Messungen im Wasserstoff gestatten im Rückschluß auf die bisherigen Resultate an Platinkathoden die Annahme, daß das CaO ein spezifisches Emissionsvermögen ohne Materialverlust besitzt. Dieser also rein metallische Effekt ergibt sich wegen des ungesetzmäßigen Verhaltens des Platins im Wasserstoff als unabhängig von der Art der metallischen Unterlage. Hierdurch wird das von Deininger auf direktem Wege gefundene Resultat bestätigt.

Die Untersuchungen im *Vakuum*, die in der Erwartung der Bestätigung der obigen Schlußfolgerungen angestellt werden, ergeben zunächst, daß die anormalen Emissionserscheinungen des CaO im Vakuum, die bisher allgemein beobachtet und von einigen Seiten als Beweismaterial für einen elektrochemischen Emissionsvorgang herangezogen wurden, Störungseffekte sind. Die Ursachen dieser Störungen sind die bei unvollkommenen Versuchsbedingungen unentfernbaren Restgase. Von der chemischen Natur dieser Restgase hängt es

ab, ob das gegen Wasserdampf und Kohlenwasserstoffe empfindliche CaO bei der Emission auch chemisch zerstört wird, oder ob sich nur indifferente, also entfernbare Oberflächenschichten auf der Kathode ausbilden. Im ersten Falle tritt bei der Emission eine allmähliche, unaufhaltsame Aufzehrung des CaO ein; im zweiten Fall läßt sich durch Ausglühen die Störung beseitigen. Bei diesen Kontrollversuchen im Vakuum wird auch die Unmöglichkeit erkannt, Kalium in einer Reinheit darzustellen, die für die Empfindlichkeit des Stickstoffs gegen elektronegative Verunreinigungen genügt, viel weniger noch für den Richardseffekt.

Durch weitere Vorsichtsmaßregeln und eine vollkommenere Evakuationsmethode gelingt es, ein extremes Vakuum herzustellen, in dem der theoretische Ansatz der Raumladungsbedingung für parallele ebene Elektroden experimentell bestätigt wird. Dieser Steigerung des Reinheitsgrades geht eine bedeutende Erhöhung des Emissionsvermögens des CaO parallel. Die Reproduktion des aus dem Elektrodenabstand berechneten Raumladungsgrenzstromes innerhalb eines großen Temperaturintervalls zugleich mit der bedeutenden Steigerung des vollkommen konstanten Emissionsvermögens des CaO bestätigen die aus den Messungen im Wasserstoff aufgestellten Schlußfolgerungen. *Es ist also die metallische Elektronenemission des CaO als nachgewiesen zu betrachten.*

Nach Aufstellung eines Kriteriums für den erzielbaren Reinheitsgrad werden die Konstanten der Richardsonschen Gleichung quantitativ bestimmt. Hierbei wird der theoretisch geforderte Zusammenhang zwischen Raumladungsgrenzstrom und Sättigungsstrom experimentell bestätigt. Die Richardsonsche Gleichung zeigt sich bis zu den niedrigsten Temperaturen, also bei der größten Empfindlichkeit der Kathode gegen Restgase innerhalb der Fehlergrenze erfüllt. Die Konstanten ergeben sich abweichend zu den bisherigen Resultaten zu folgenden Mittelwerten:

$$A = 2 \cdot 10^{10}; \delta \epsilon = 2,5 \text{ Volt.}$$

Es wird gezeigt, daß diese viel niedrigeren Werte den theoretisch erwarteten näher stehen. Die Austrittsarbeit ergibt sich als rein elektrischer Natur. Die Zahl  $n$  der freien Elektronen wird gleich der Molekülzahl gefunden. Diese „freien“ Elektronen werden daher als Leitungselektronen aufgefaßt

und eine Abschätzung des metallischen Leitvermögens des CaO bei 1400° C vorgenommen. Es ergibt sich eine den bisher direkt bestimmten Werten für die Metalloxyde naheliegende Größe. Bei dieser Berechnung wurde für die Weglänge  $l$  des Elektrons der für die Austrittsarbeit charakteristische Radius der Wirkungssphäre des CaO-Moleküls gesetzt. Hieraus resultiert die Möglichkeit, wenigstens für die Metalle, unter Annahme einer Konstanten  $n$  die Temperaturfunktion von  $l$  aus einer etwa experimentell nachweisbaren Temperaturabhängigkeit der Austrittsarbeit des Elektrons näher aufzuklären.

Es wird darauf hingewiesen, daß bei den Oxydelektroden, bei denen die Oxydschicht sich auf einer metallischen Unterlage befindet, die Wärmebewegung der Elektronen innerhalb des Oxyds durch den elektrischen Heizstrom nicht merklich gestört wird, für den Emissionsvorgang also alle bei der bestimmten Temperatur „freien“ Elektronen der metallischen Leitfähigkeit zur Verfügung stehen.

Eine Überlegung, die an den auch bei dem CaO beobachteten „idealen Sättigungsstrom“ beim Potentialgradient Null angestellt wird, ergibt, daß dieser Elektronenstrom in einem extremen Vakuum infolge der Raumladungswirkung auch bei rein thermischem Betrieb nicht für die Bestimmung der Richardsonschen Konstanten herangezogen werden kann. Es bleibt also für die Praxis nur der Sättigungsstrom bei beschleunigendem Potential. Hierdurch erscheint, abgesehen von der berechenbaren Aufhebung der Thomsonschen Bildkraft, die Austrittsarbeit des Elektrons weniger beeinflußt als wie die Vorgänge an der Anode.

Es wird die Wirkung des Wasserstoffs auf den Raumladungsgrenzstrom untersucht. Das Versuchsresultat zeigt eine Abhängigkeit der Aufhebung der Raumladungsbegrenzung vom Druck und von der Stromdichte. Die Grundannahmen der Townsendschen Theorie sowie die eingeführte Stoletowsche Konstante für Wasserstoff bleiben auch unter diesen exakteren Bedingungen aufrecht erhalten.

(Eingegangen 21. Oktober 1916.)

4. *Die Originalluftpumpe Otto v. Guericke's. II<sup>1)</sup>;*  
*von G. Berthold.*

Über der Schwedischen Luftpumpe Guericke's hat ein eigener Unstern gewaltet. Während die Berliner Luftpumpe aller Welt bekannt ist, haben die berufenen Hüter dieser kostbaren Relique in Lund den ihnen anvertrauten Schatz mit tiefstem Dunkel umgeben. Nicht aus Lund, sondern aus Upsala kam die erste Kunde, indem Wimmerstedt 1784 in seiner Dissertation von der Herkunft und dem derzeitigen Vorhandensein in Lund berichtete; eine Bemerkung in dem Stockholmschen Magazin von 1755 erwähnte sodann, daß die Luftpumpe in den Besitz der Akademie zu Lund gelangt sei. Nach dieser Zeit fehlt jede Nachricht.

Nach Einsicht der Dissertation von Wimmerstedt lenkte aber Verfasser in den Schriften der Schwedischen Akademie der Wissenschaften in Stockholm 1895 *zuerst* wieder die Aufmerksamkeit auf diese Originalluftpumpe Guericke's und suchte zu Nachforschungen in Stockholm und in Lund anzuregen, jedoch vergeblich.

Jetzt endlich, nach fast zweihundert Jahren, ist es durch eine Anfrage aus Berlin gelungen, die Lunder Gelehrten aus ihrem Schlummer aufzuwecken. Es ist das hohe Verdienst Hrn. v. Klineckowstroems in Berlin, nachdem ihm das Stockholmsche Magazin zu Gesicht gekommen war, die unschätzbare Relique in dem Physikalischen Institut der Universität Lund ausfindig gemacht zu haben.<sup>2)</sup> Nunmehr ist die Möglichkeit gegeben, durch sorgfältigste Prüfung der Berliner, jetzt in München befindlichen, und der Lunder Luftpumpe und Vergleichung mit Guericke's Abbildungen seines Originalapparates in den Exp. nov. festzustellen, welches Exemplar

1) Vgl. Ann. d. Phys. u. Chem. Neue Folge. 54. p. 724. 1895.

2) Geschichtsblätter für Technik, Industrie und Gewerbe. 111. Nr. 7b. p. 9. Berlin 1916.

als das ältere zu bezeichnen und ob diesem Exemplare der Anspruch auf den Namen „Archetyp“ zuzuerkennen ist.

Diese Frage hat bereits ihren Schatten vorausgeworfen. Als Verfasser fand, daß die Photographie der Berliner Luftpumpe Abweichungen von Guericke Abbildungen zeigte<sup>1)</sup>), wies er nachdrücklich auf die Bedeutung dieses Umstandes hin und betonte besonders die Tatsache, daß während über die Herkunft der Berliner Luftpumpe nicht das mindeste bekannt ist, feststeht, daß die Lunder Luftpumpe bereits 1676 durch Dr. Christian Heraeus nach Stockholm gebracht wurde. Eigentümlich berührt eine Polemik des Hrn. Poske.<sup>2)</sup> Sehon die Jahreszahl 1676 mache es unwahrscheinlich, daß es sich hier um die Originalluftpumpe Guericke handle, „da Guericke sich noch bis 1681 in Magdeburg aufhielt und die Luftpumpe schwerlich vorher aus den Händen gelassen hat“. Wunderbar ist es, daß Hr. Poske den Hinweis auf die Vergleichung mit Guericke Abbildung vollständig ignoriert, obschon es ihm als Berliner ein Leichtes gewesen wäre, das Berliner Exemplar in natura darauf hin zu prüfen.

1) Hr. v. Klinkowstroem macht erneut darauf aufmerksam, daß das Berliner Exemplar erhebliche Abweichungen von Guericke Abbildungen aufweise, während die Ähnlichkeit der Lunder Luftpumpe in die Augen falle.

2) Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 4. p. 367. 1902. Es mag hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß Guericke nicht etwa berichtet, er habe für den Kurfürsten von Brandenburg die Luftpumpe Typus III konstruiert, sondern, da dieser seine Versuche zu sehen wünschte, den Apparat fertiggestellt.

(Eingegangen 21. Oktober 1916.)

## Namenregister zum Jahrgang 1916.

### A.

Alterthum, H., Seitz, W. u.  
Lechner, G., Wärmeausdehnung  
und Kompressibilität von Flüssig-  
keiten bei tiefen Temperaturen  
49, 85.

### B.

Bergholm, C., Der Temperatur-  
koeffizient der elektrischen Doppel-  
brechung in Flüssigkeiten 51,  
414.

Berthold, G., Die Originalluft-  
pumpe Otto v. Guericke. II.  
51, 881.

Birnbaum, J. W., Über eine neue  
Versuchsanordnung zur Prüfung  
der menschlichen Hörschärfe für  
reine Töne beliebiger Höhe 49, 201.

Böhi, A., Verfahren zur Messung  
der absoluten Potentialdiffe-  
renzen, welche beim Kontakt be-  
liebiger Leiter auftreten 51, 643.

Bois, H. du, Theorie der Pol-  
armaturen und Feldspulen 51,  
577. — Theorie der Zugarmaturen  
und Zugspulen 51, 797.

Borelius, G., Über die elektrischen  
Erscheinungen der Grenzflächen  
von wässrigen Lösungen und  
Isolatoren 50, 447.

Borelius, G. u. Lindh, A. E.,  
Elektrischer Widerstand und

Thermokraft des kristallinischen  
Wismuts, 51, 607.

Buchholz †, A., Über physika-  
lische Einheitensysteme 51, 678.

### C.

Caspar, P., Über die Kreisgebiete  
im elektromagnetischen Felde  
eines Hertzschen und eines  
Abrahamschen Erregers 51, 649.

Cassel, H., Über Entflammung und  
Verbrennung von Sauerstoff-Was-  
serstoff-Gemischen 51, 685.

Christiansen, C., Elektrizitäts-  
erregung beim Zerspritzen von  
Flüssigkeiten (Balloelektrizität).  
(Dritter Teil) 51, 530.

Crommelin, C. A. u. Smid, Frl.  
E. I., Eine Vergleichung einer  
Druckwage von Schäffer und  
Budenberg mit dem offenen  
Standardmanometer des Physi-  
kalischen Instituts in Leiden  
zwischen 20 und 100 Atmos-  
phären, als Beitrag zur Theorie  
der Druckwage von S. und B.  
51, 621.

### D.

Dember, H., Über die Bestimmung  
der Loschmidttschen Zahl aus  
Extinktionskoeffizienten des kurz-  
welligen Sonnenlichts mit Hilfe

eines lichtelektrischen Spektral-photometers 49, 599.

## E.

Ehrenfest, P., Adiabatische Invarianten und Quantentheorie 51, 327.

Ehrhardt, M., Nachtrag zu „Über elektrische Schwingungen in Luft und längs Drähten“ 49, 116.

Einstein, A., Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie 49, 769. — Über Friedrich Kottlers Abhandlung „Über Einsteins Äquivalenzhypothese und die Gravitation“ 51, 639.

Epstein, P. S., Zur Theorie des Starkeffektes 50, 489. — Versuch einer Anwendung der Quantentheorie auf die Theorie des lichtelektrischen Effekts und der  $\beta$ -Strahlung radioaktiver Substanzen 50, 815. — Zur Quantentheorie 51, 168.

Ewald, P. P., Zur Begründung der Kristalloptik 49, 1. — Zur Begründung der Kristalloptik. (Fortsetzung) 49, 117.

## F.

Flamm, L. u. Schumann, R., Die Geschwindigkeitsabnahme der  $\alpha$ -Strahlen in Materie 50, 655.

Frey, W., Potentialmessungen im elektrischen Nickellichtbogen 49, 937.

Friman, E., Über die Absorption und Diffusion schneller Kathodenstrahlen ( $\beta$ -Strahlen) in Gasen und Dämpfern 49, 373.

Friman, E. u. Siegbahn, M., Über die Hochfrequenzspektren der Elemente As-Rb 49, 611. — Über die Hochfrequenzspektren (L-Reihe) der Elemente Tantal bis Wismut 49, 616.

## G.

Gans, R., Statistische Theorie des Dia-, Para- und Metamagnetismus 49, 149. — Über Paramagnetismus 50, 163.

Gehrecke, E., Zur Kritik und Geschichte der neueren Gravitationstheorien 51, 119.

Geipel, H., Der Wechselstrom-Gleichstromeffekt und die elektrische Nachwirkung bei Wismut, Antimon und Tellur 51, 503.

Gerlach, W., Über die Absorption der schwarzen Strahlung im Wasserdampf- und Kohlensäuregehalt der Luft 50, 233. — Über die Verwendung von Ruß und Platinmohr als Schwärzungsmittel des Empfängers bei absoluten Strahlungsmessungen 50, 245. — Die Konstante des Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetzes; neue absolute Messungen zwischen 20 und 450° C 50, 259.

Germershausen, W., Über die Elektronenemission des Calciumoxyds in Gasen und im extremen Vakuum 51, 705. — Über die Elektronenemission des Calciumoxyds in Gasen und im extremen Vakuum (Fortsetzung) 51, 847.

Grube †, O. u. Heydweiller, A., Über physikalische Eigenschaften von Lösungen in ihrem Zusammenhang. V. Ultraviolette Dispersion von Salzen in Wasser 49, 653.

Günther, P., Untersuchungen über die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen 51, 828.

## H.

Hauer, F. v., Die elektrische Leitfähigkeit von Metallen 51, 189.

Herzfeld, K. F., Zur Statistik des Bohrschen Wasserstoffatommodells 51, 261.

Heydweiller, A. u. Grube †, O., Über physikalische Eigenschaften von Lösungen in ihrem Zusammenhang. V. Ultraviolette Dispersion von Salzen in Wasser 49, 653.

Hirsch, R. v., Versuche über das Leuchten der Wasserstoff-Kanalstrahlen 49, 851.

Holm, E. A., Über die mittlere molekulare Weglänge unter Berücksichtigung des Molekularvolumens 51, 768.

Hoogenboom-Smid, E. I., Vergleichung der Druckwage des Van't Hoff-Laboratoriums zu Utrecht mit denen des Van der Waals-Fonds zu Amsterdam 51, 635.

Hyde, E. P., Bestimmung der wahren Temperatur fester Körper aus dem Schnittpunkt der logarithmischen Isochromaten im sichtbaren Spektrum 49, 144.

## K.

Knudsen, M., Die Verdichtung von Metalldämpfen an abgekühlten Körpern 50, 472.

König, W., Über das Mitschwingen kleiner Körper in Schallwellen 49, 648.

Konstantinowsky, D., Kriterien zur Existenz einer Atomistik der Elektrizität; zur Erscheinung des photoelektrischen Effektes. Erwiderung auf die Antwort E. Meyers u. W. Gerlachs 49, 881.

Kossel, W., Über Molekülbildung als Frage des Atombaus 49, 229.

Kottler, F., Berichtigungen zur Arbeit „Fallende Bezugssysteme vom Standpunkte des Relativitätsprinzips“ 50, 600. — Über Einsteins Äquivalenzhypothese und die Gravitation 50, 955.

Krogness, O. u. Vegard, L., Die Höhe des Nordlichtes vermittelst parallaktischer Aufnahmen an dem Haldte-Observatorium 51, 495.

Krüger, F., Über die Eigenschwingungen freier Kreiselmoleküle 50, 346. — Molekulare Präzessionsschwingungen und spezifische Wärme 51, 450.

Küstner, F., Untersuchungen über den Schalldruck 50, 941.

## L.

Landé, A., Die Abzählung der Freiheitsgrade in einer Elektronenwolke (strahlender Körper) 50, 89.

Laue, M. v., Über die Symmetrie der Kristall-Röntgenogramme 50, 433.

Lauth, A., Elementare Ableitung der Geschwindigkeit von Kreis- und Schraubenwirbeln 49, 671.

Lechner, G. u. Seitz, W., Wärmeausdehnung und Kompressibilität von Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen 49, 93.

Lechner, G., Seitz, W. u. Alterthum, H., Wärmeausdehnung und Kompressibilität von Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen 49, 85.

Lehmann, O., Plastizität fester Kristalle und erzwungene Homöotropie I. und II. Art 50, 555.

Lindh, A. E. und Borelius, G., Elektrischer Widerstand und Thermokraft des kristallinischen Wismuts 51, 607.

Lüssem, H., Untersuchungen am Lithiumspektrum im elektrischen Felde 49, 865.

## M.

Mandersloot, W., Das Emissionspektrum zweiatomiger Verbindungsäste im ferneren Ultrarot 49, 725.

March, A., Zur Elektronentheorie der Metalle 49, 710.

Marx, E., Die Quadratwurzelgesetze der Alkaliflammen und die Theorie der Flammenleitung 50, 521.

Meißner, K. W., Untersuchungen und Wellenlängenbestimmungen im roten und infraroten Spektralbezirk 50, 713. — Interferometrische Wellenlängenbestimmungen im roten Spektralbezirk 51, 95.

Millikan, R. A., Die Existenz eines Subelektrons? 50, 729

**Mohr, W.**, Die Absorption von Radiumemanation durch Kokosnußkohle 51, 549.

## O.

**Oseen, C. W.**, Zur Kritik der Elektronentheorie der Metalle 49, 71. — Über die ultrarote Strahlung einer dünnen Metallplatte 50, 270.

## P.

**Paschen, F.**, Bohrs Heliumlinien 50, 901.

**Planck, M.**, Die physikalische Struktur des Phasenraumes 50, 385.

**Pogány, B.**, Über spezifischen Widerstand und optische Konstanten dünner Metallschichten 49, 531.

**Pogány, B. u. Zemplén, G.**, Untersuchungen über die innere Reibung von Flüssigkeiten. III. Mitteilung. Innere Reibung und Gleitung tropfbarer Flüssigkeiten 49, 39.

**Posejpal, V.**, Über die Verwendung eines Spektralphotometers in Verbindung mit dem Jamin-schen Refraktometer 49, 419.

## R.

**Rathjen, H. u. Schulze, F. R.**, Das Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\alpha = c_p/c_v$  von Stickstoff 49, 457.

**Reiche, F.**, Zur Theorie der Dispersion in Gasen und Dämpfen 50, 1. — Zur Theorie der Dispersion in Gasen und Dämpfen (Fortsetzung) 50, 121.

**Reissner, H.**, Über die Eisengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie 50, 106.

**Retschinsky, T.**, Über die Geschwindigkeiten der Kanalstrahlteilchen 50, 369.

**Richard, F.**, Stabilität zweiatomiger Moleküle, ihre Dissoziations-

wärme und deren Beziehung zur elektrochemischen Theorie 50, 229.

**Rose, H. u. Wiegrefe, A.**, Versuche über die Sichtbarmachung von Lichtströmungen durch die Einfallsebene im isotropen Medium bei Totalreflexion 50, 281.

## S.

**Schaefer, Cl.**, Die träge Masse schnell bewegter Elektronen. (Ergänzungen zu der gleichnamigen Arbeit des Hrn. C. Neumann) 49, 935. — Zur Methode der logarithmischen Isochromaten 50, 841.

**Schaefer, Cl. u. Schubert, M.**, Kurzwellige ultrarote Eigenfrequenzen der Sulfate und Karbonate 50, 283. — Zum optischen Verhalten des Kristallwassers 50, 339.

**Schaefer, Cl. u. Stallwitz, H.**, Ein zweidimensionales Dispersionsproblem 50, 199.

**Schaefer, K. L.**, Über die Resonanz- und Interferenzerscheinungen in der Seebeckschen Röhre 50, 700.

**Schubert, M. u. Schaefer, Cl.**, Kurzwellige ultrarote Eigenfrequenzen der Sulfate und Karbonate 50, 283. — Zum optischen Verhalten des Kristallwassers 50, 339.

**Schulze, F. A.**, Über eine Zustandsgleichung für Luft, geprüft an Messungen des Verhältnisses der spezifischen Wärmen sowie der spezifischen Wärmen selbst 49, 569. — Die „Umkehrkurve“ des Joule-Thomson-Effektes für Luft 49, 585. — Die Übereinstimmung der als Reflexionstöne oder Pfaundlersche Töne bezeichneten Klangerscheinungen mit der Helmholtzschen Resonanztheorie des Hörens 49, 683.

**Schulze, F. A. u. Rathjen, H.**, Das Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\alpha = c_p/c_v$  von Stickstoff 49, 457.

Schumann, R. u. Flamm, L., Die Geschwindigkeitsabnahme der  $\alpha$ -Strahlen in Materie 50, 655.

Schweidler, E. von, Über radioaktive Schwankungen bei Verwendung nicht gesättigter Ströme; Bemerkungen zu der gleichbetitelten Arbeit des Hrn. A. Ernst 49, 594.

Schweikert, G., Nachtrag zu der Arbeit: „Bestimmung der Schallgeschwindigkeit und des Verhältnisses der spezifischen Wärmen der Gase nach der Methode der Kundtschen Staubfiguren“ 49, 433.

Seemann, H., Röntgenspektroskopische Methoden ohne Spalt 49, 470.

Seitz, W., Alterthum, H. u. Lechner, G., Wärmeausdehnung und Kompressibilität von Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen 49, 85.

Seitz, W. u. Lechner, G., Wärmeausdehnung und Kompressibilität von Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen 49, 93.

Siegbahn, M. u. Friman, E., Über die Hochfrequenzspektren der Elemente As-Rh 49, 611. — Über die Hochfrequenzspektren (*L*-Reihe) der Elemente Tantal bis Wismut 49, 616.

Smid, Frl. E. I. u. Crommelin, C. A., Eine Vergleichung einer Druckwage von Schäffer und Budenberg mit dem offenen Standardmanometer des Physikalischen Instituts in Leiden zwischen 20 und 100 Atmosphären, als Beitrag zur Theorie der Druckwage von S. und B. 51, 621.

Smid-Hoogenboom, E. J., Vergleichung der Druckwage des Van't Hoff-Laboratoriums zu Utrecht mit denen des Van der Waals-Fonds zu Amsterdam 51, 635.

Stallwitz, H. u. Schaefer, C., Ein zweidimensionales Dispersionsproblem 50, 199.

Stark, J., Das neutrale Atom und das positive Atomion als Träger des Banden- und des Serienspektrums des Wasserstoffs 49, 179. — Beobachtungen über den zeitlichen Verlauf der Lichtemission in Spektralserien 49, 731. — Tatsachen und Folgerungen über Zahl und Koppelung von Elektronen im Wasserstoffatom 50, 53. — Der Träger der Haupt- und Nebenserien der Alkalien, alkalischen Erden und des Heliums 51, 220.

Stern, O., Die Entropie fester Lösungen 49, 823. — Über eine Methode zur Berechnung der Entropie von Systemen elastisch gekoppelter Massenpunkte 51, 237.

Sommerfeld, A., Zur Quantentheorie der Spektrallinien 51, 1. — Zur Quantentheorie der Spektrallinien. (Fortsetzung) 51, 125.

Svedberg, The., Über die Elektrizitätsleitung in anisotropen Flüssigkeiten 49, 437.

## V.

Vegard, L., Über die elektrische Absorption in Entladungsröhren 50, 769. — Nordlichtuntersuchungen. Über die physikalische Natur der kosmischen Strahlen, die das Nordlicht hervorufen 50, 853.

Vegard, L. u. Krogness, O., Die Höhe des Nordlichts vermittelst parallaktischer Aufnahmen an dem Haldde-Observatorium 51, 495.

Voigt, W., Bemerkungen zu den Svedbergschen Beobachtungen über Elektrizitätsleitung in anisotropen Flüssigkeiten 50, 222.

## W.

Wagner, E., Über vergleichende Raumgittermessungen an Steinsalz und Sylvian mittels homogener Röntgenstrahlen und über deren exakte Wellenlängenbestimmung 49, 625.

Weber, L., Die Albedo des Luftplanktons 51, 427.

Weinstein, M. B., Zur Strahlungstheorie 49, 363. — Über die innere Reibung der Gase. I. Der erste Reibungskoeffizient 50, 601. — Über die innere Reibung der Gase. II. Der zweite Reibungskoeffizient, die Gustav Kirchhoff'schen thermodynamisch-hydrodynamischen Gleichungen, die Maxwell'sche Gastheorie 50, 796. — Über die Zustandsgleichung der festen Körper. (Erste Abhandlung) 51, 465.

Weißenberger, A., Über die Thermokraft und Elektrizitätsleitung variabler Leiter. Beiträge zur Elektronentheorie 49, 481.

Wendt, G. u. Wetzel, R. A., Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf die Tripletserien des Quecksilbers und die Dupletserien des Aluminiums 50, 419.

Wereide, Th., Die statistisch-mechanische Grundlage der allgemeinen Quantentheorie 49, 966. — Der Energieaustausch zwischen Materie und Äther 49, 976.

Wetzel, R. A. u. Wendt, G., Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf die Tripletserien des Quecksilbers und die Dupletserien des Aluminiums 50, 419.

Weyssenhoff, J. v., Die Anwendung der Quantentheorie auf rotierende Gebilde und die Theorie des Paramagnetismus 51, 285.

Wiegrefe, A., Neue Lichtströmungen bei Totalreflexion. Beiträge zur Kenntnis des Poyntingschen Vektors (2. Mitteilung) 50, 277.

Wiegrefe, A. u. Rose, H., Versuche über die Sichtbarmachung von Lichtströmungen durch die Einfallsbene im isotropen Medium bei Totalreflexion 50, 281.

Wien, W., Die elektrodynamische Spaltung der Serienlinien des Wasserstoffs 49, 843.

Z.

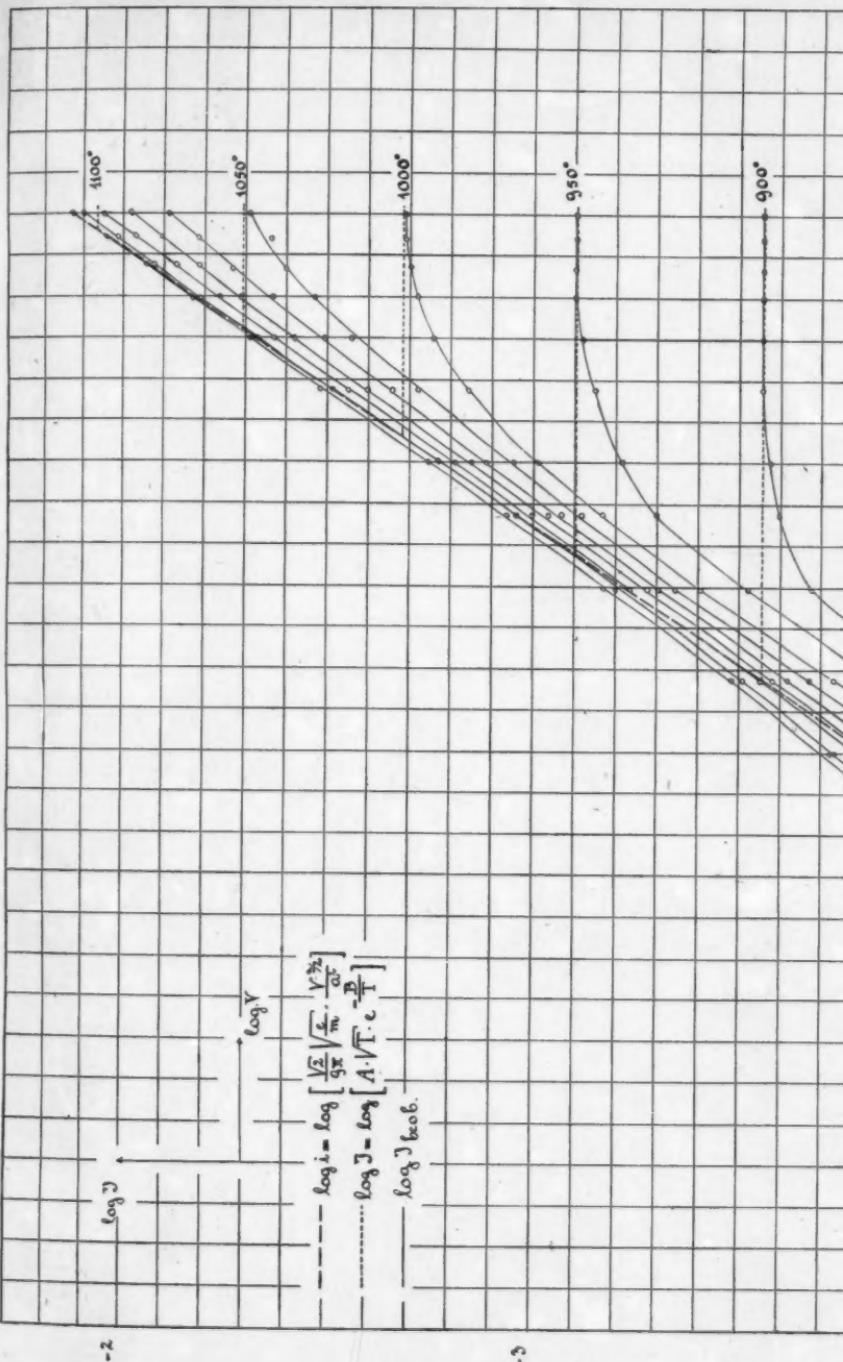
Zahn, H., Über den Nachweis elektromagnetischer Wellen an dielektrischen Drähten 49, 907.

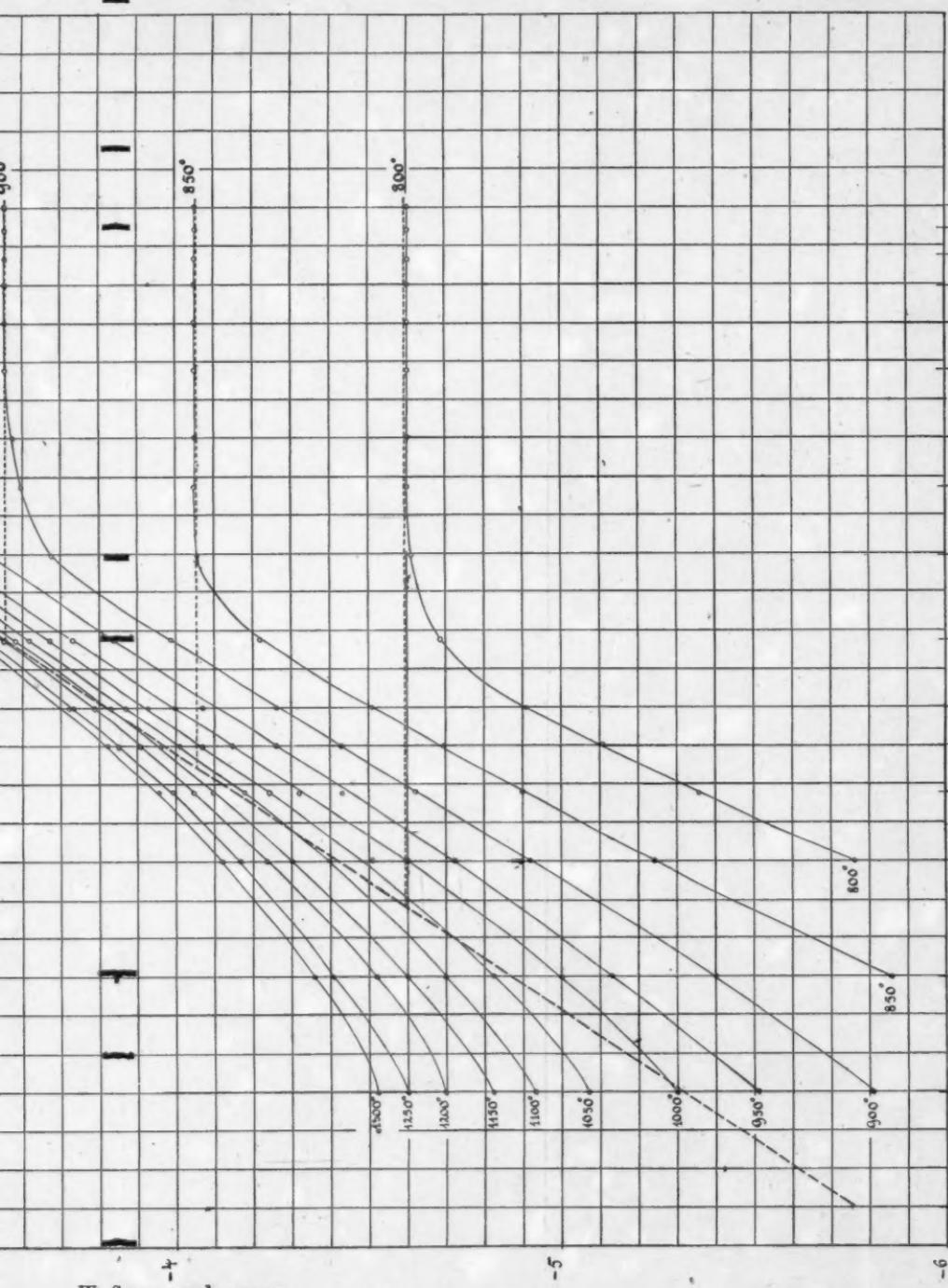
Zakrzewski, C., Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. George Jaffé u. d. T.: „Zur Theorie der Lichtabsorption in Metallen und Nichtleitern“ 49, 456.

Zemplén, G. u. Pogány, B., Untersuchungen über die innere Reibung von Flüssigkeiten. III. Mitteilung. Innere Reibung und Gleitung tropfbarer Flüssigkeiten 49, 39.

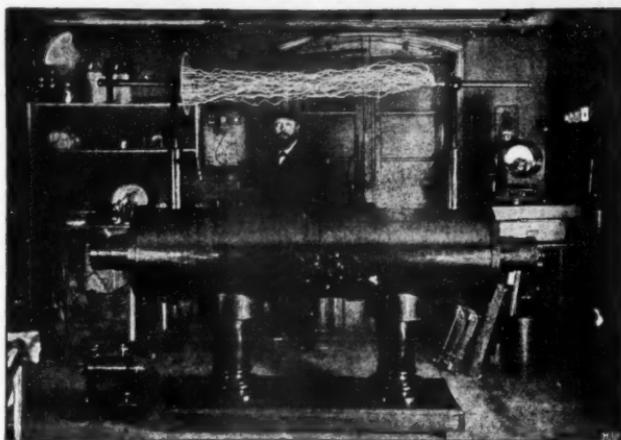


K.-Taf. VII









Induktorium 120 cm Funkenlänge, betätigt mit unserm Collektor-Unterbrecher, Expositions-  
dauer 1 Sekunde. Links unten: Induktorium 10 cm Funkenlänge.

Unsere Induktorien eignen sich hervorragend zum Laden großer Kapazitäten, sowohl mit Wechselstrom ohne Unterbrecher, als mit unterbrochenem Gleichstrom.

**Fr. Klingelfuss & Co., Basel.**

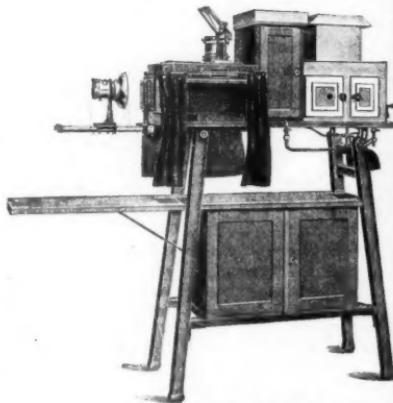
## **Max Kohl A. G. Chemnitz**

**Physikalische  
Apparate**

**Hörsaal- und  
Laboratorien-  
Einrichtungen**

**Funken-  
Induktoren**

**Projektions-  
Apparate**



Kohls Megadiaskop.

# Ernst Leitz, Wetzlar

## Optische Werke

### Zweiggeschäfte:

Berlin NW  
Luisenstraße 45

New-York  
30 East 18<sup>th</sup> Street



## Liliputbogenlampe

mit Hand- oder Uhrwerk-Regulierung  
und rechtwinkeliger Kohlenstellung  
Beste, billigste und zuverlässigste  
Lichtquelle f. physikalische Versuche

**Liste A 45 D kostenfrei**

# Zeitschrift für Bevölkerungspolitik und Säuglingsfürsorge

redigiert von

**Prof. Dr. Bruno Salge**  
in Straßburg

**Prof. Dr. Arthur Schloßmann**  
in Düsseldorf

**Prof. Dr. Erich Opitz**  
in Gießen

Zur Zeit erscheint Band 9

Die große Zeit, in der wir leben, stellt an das deutsche Volk neue und große Aufgaben. Je heißer der Kampf in der Gegenwart, desto dringlicher mahnt uns die Pflicht für die Zukunft zu sorgen. Schon bisher hat unsere Zeitschrift sich nicht ausschließlich an die Erörterung von Fragen gebunden erachtet, die sich auf das eigentliche Feld der Säuglingsfürsorge beziehen. Alles, was wichtig für den Aufbau des zukünftigen Volkskörpers ist, schien uns beachtlich. Mehr als bisher wendet sich jetzt die Aufmerksamkeit weiter Kreise der Bedeutung bevölkerungspolitischer Vorgänge zu. Immer mehr wird ihre Erörterung in den Vordergrund treten, wenn auch darüber niemals die Säuglingsfürsorge im engeren Sinne aus dem Auge gelassen werden darf.

Möge unsere Zeitschrift auch weiter sich die Beachtung ihrer bisherigen Leser erfreuen und zu den alten zahlreiche neue Freunde gewinnen.

12 Hefte bilden einen Band. Preis des Bandes 12 Mark. Porto für die direkte Zusendung im Inlande —.75 Mark, nach dem Auslande 1.20 Mark. Durch alle Buchhandlungen, sowie direkt von der Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

**Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig**  
**Döri enstrasse 16**

# **E. Leybold's Nachfolger**

**Cöln**

**Neu!**

## **Gaede-Diffusionspumpe**

**D. R. P.**

(vergl. Annalen der Physik 46. 1915, S. 337—392)

**Luftleere 0,00001 mm Hg und höher.**

Die Sauggeschwindigkeit der Diffusionspumpe ist etwa so groß wie bei Gaede's rotierender Quecksilberpumpe, vor welcher sie aber den Vorzug besitzt, alle Dämpfe wie Wasser- und Fettdämpfe, ausgenommen allein Quecksilberdämpfe, abzusaugen. Wegen des Fortfalls jeder mechanischen Bewegung nach Abstellen der Vorvakumpumpe ist die Diffusionspumpe für alle diejenigen Apparaturen und wissenschaftlichen Versuchsanordnungen unentbehrlich, bei welchen eine Luftpumpe dauernd ohne Bewachung die höchsten Vakua aufrecht erhalten muß. Das erforderliche Vorvakuum von 0,1 mm wird am besten mit der

## **Gaede'schen Kapselpumpe**

erreicht.

**Ein neues Prinzip für Luftpumpen!**

Alleinige Inseratenannahme durch: **Gelsdorf & Co., Eberswalde.**

Metzger & Wittig, Leipzig.

